

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Montpellier septembre 1983 ∞

EXERCICE 1

Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de nombres complexes définie par la donnée de $z_0 = 2\sqrt{2}(-1 + i)$ et les conditions suivantes : pour tout entier naturel n , un représentant de l'argument de z_{n+1} appartient à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ et $z_{n+1}^4 = z_n$.

1. Déterminer le module et un argument de z_1 .
2. On pose $r_n = |z_n|$ et $v_n = \ln r_n$ où $\ln r_n$ désigne le logarithme népérien de r_n .
Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

EXERCICE 2

On donne dans un plan un cercle fixe (O) de centre O et de rayon R et un point A fixe situé sur (O).

Les points B et D décrivent (O) de telle sorte que $DB = \ell$, ℓ réel donné ($0 < \ell < 2R$).

1. Déterminer le lieu du milieu I de [BD].
2. Déterminer le lieu du centre de gravité G du triangle ABD.
3. Déterminer le lieu de l'orthocentre H du triangle ABD.
(On commencera par démontrer $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$).
4. Déterminer le lieu du point C, C étant le quatrième sommet du parallélogramme construit sur [AB] et [AD].

PROBLÈME

Les quatre parties du problème sont dans une large mesure indépendantes

On considère les fonctions numériques de variable réelle f et g définies respectivement dans \mathbb{R} et dans $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \quad g(x) = \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|.$$

(où \ln désigne la fonction logarithme népérien).

Toutes les courbes demandées seront tracées dans un même repère orthonormé (on prendra comme unité 2 cm).

Partie A

1. Montrer que f est impaire. Étudier ses variations. Tracer sa courbe représentative.

2. Soit a un réel différent de 0. Calculer l'aire $\mathcal{A}(a)$ de la partie du plan ainsi définie

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ f(x) \leq y \leq 1 \end{cases}$$

(on pourra utiliser le fait que $1 = (1 + e^x) - e^x$).

Étudier l'éventuelle limite de cette aire lorsque a tend vers $+\infty$.

Partie B

1. Soit h la fonction numérique de variable réelle définie dans \mathbb{R} par

$$h(x) = f(x) - \frac{x}{2}.$$

Étudier les variations de h et en déduire le signe de $h(x)$ suivant la valeur de x .

2. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi définie : $u_0 = 1$ et, pour tout n , $u_{n+1} = f(u_n)$.
Montrer que

$$\forall n, \quad 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2}$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Partie C

1. La fonction g est-elle paire? impaire? Étudier ses variations et tracer sa courbe représentative.
2. Soit b un réel supérieur à 2. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, la valeur moyenne $B(b)$ de g sur l'intervalle $[2; b]$ ainsi définie

$$B(b) = \frac{1}{b-2} \int_2^b g(x) dx.$$

Montrer que $B(b)$ tend vers 0 quand b tend vers $+\infty$.

Partie D

1. Montrer que la restriction de g à $] -1; 1[$ est une bijection de cet intervalle sur \mathbb{R} .
Déterminer sa bijection réciproque.
2. Étant donné un réel x_0 de $\mathbb{R} - \{-1; +1\}$, résoudre l'équation, d'inconnue x :

$$g(x) = g(x_0).$$

(Discuter suivant la valeur de x_0).

3. On considère la fonction $f \circ g$ définie sur $\mathbb{R} - \{-1; +1\}$. Cette fonction $f \circ g$ est-elle paire? impaire?

Donner l'expression la plus simple de $f \circ g(x)$ suivant la valeur de x . Étudier les éventuelles limites de la fonction $f \circ g$ en 1 et en -1 .

Tracer la courbe représentative de $f \circ g$.