

∞ Baccalauréat C Montréal et New York juin 1971 ∞

EXERCICE 1

Discuter, suivant les valeurs du paramètre m , le nombre de racines de l'équation

$$e^{2x} - 2me^x + 2m + 8 = 0.$$

(On pourra poser $e^x = X$.)

Achever la résolution pour $m = 6$ (on ne demande pas de donner des valeurs décimales approchées des racines).

EXERCICE 2

On donne trois nombres réels distincts a, b et c , avec $a \neq 0$.

Sachant que les trois nombres a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique et que les trois nombres $3a, 2b$ et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, calculer la raison de la suite géométrique.

PROBLÈME

On considère, dans un plan rapporté à un repère orthonormé $x'Ox$ et $y'Oy$, l'ensemble des cercles (C) tangents à $x'Ox$. On se propose de transformer ces cercles (C) dans l'inversion de pôle O et de puissance $4a^2$ ($a > 0$).

On désignera par M le centre de (C) et par x_0 et y_0 ses coordonnées.

1. Quels sont les cercles (C) qui ont pour inverses des droites?

Quel est l'ensemble de leurs centres M?

Dans toute la suite du problème, on ne considère que des cercles (C) dont le centre M n'est pas situé sur $y'Oy$ ($x_0 \neq 0$). Tout cercle (C) a alors pour inverse un cercle (C') de centre M' dont les coordonnées sont X_0 et Y_0 .

2. a. Démontrer que l'on a les relations suivantes :

$$X_0 = \frac{4a^2}{x_0} \quad \text{et} \quad Y_0 = \frac{4a^2 y_0}{x_0}.$$

- b. Quels sont les cercles (C) globalement invariants dans l'inversion considérée?
Quel est l'ensemble de leurs centres?

3. On suppose que le point M décrit la parabole (P) d'équation

$$y = \alpha x^2 + \beta,$$

où α et β désignent deux constantes.

- a. Quelle valeur faut-il donner à β pour que tous les cercles (C') aient le même rayon?

- b.** Quelle relation doit-il exister entre α et β pour que le point M' appartienne comme M à la parabole (P) ?
- 4.** Dans toute cette quatrième question, le point M décrit la droite (D) d'équation

$$y = mx + p,$$

où m et p désignent deux constantes non nulles ($m \neq 0$ et $p \neq 0$).

- a.** Quel est l'ensemble des points M' ? Démontrer géométriquement que les cercles (C') sont tangents non seulement à $x'Ox$, mais aussi à un cercle fixe (Γ) et qu'ils sont orthogonaux à un autre cercle fixe (Ω) .

Dans le cas particulier où $m = 1$ et $p = -2a$, déterminer le centre et le rayon des cercles (Γ) et (Ω) .

- b.** A et B désignent les points de (D) d'ordonnées respectives p et $-p$. On considère deux cercles appartenant à l'ensemble des cercles (C) , soit (C_1) et (C_2) , de centres respectifs M_1 et M_2 situés sur (D) et tels que le birapport (A, B, M_1, M_2) vérifie la condition

$$(A, B, M_1, M_2) = -1.$$

Montrer que les centres des cercles (C'_1) et (C'_2) , inverses des cercles (C_1) et (C_2) , ont même ordonnée.