

## ∞ Baccalauréat C Montréal–New–York juin 1977 ∞

### EXERCICE 1

On considère le nombre complexe  $u = 2 - 2i\sqrt{3}$ .

1. Mettre  $u$  sous forme trigonométrique et en déduire tous les nombres complexes  $z$  tels que  $z^4 = u$ .
2. Déterminer par la méthode algébrique les nombres complexes  $X$  tels que  $X^2 = u$ , puis les nombres complexes  $z$  tels que  $z^4 = u$ .
3. En déduire  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$ .

### EXERCICE 2

Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

On donne les points A, B, C, D de coordonnées respectives :

$$(1; 1) \quad (-3; 3) \quad (2; 2) \quad (-4; 4)$$

On appelle E et F les milieux respectifs de (A, C) et (B, D).

1. Démontrer qu'il existe une rotation affine unique  $\mathcal{R}$  qui transforme A en B et C en D. Déterminer son angle et son centre I.
2. Démontrer qu'il existe une rotation affine unique  $\mathcal{R}'$  qui transforme A en D et C en B. Déterminer son angle et son centre J.
3. Que peut-on dire du quadrilatère IEJF?  
Étudier  $\mathcal{R}' \circ \mathcal{R}$  et  $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}'$ .

### PROBLÈME

#### Partie A

Soit  $f$  la fonction numérique définie par

$$\begin{cases} \forall x \in ]-\infty; 0[, & f(x) = 1 - e^x \\ \forall x \in ]0; \infty[, & f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \\ f(0) & = 0 \end{cases}$$

1. **a.** Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et que  $f$  est dérivable en tout point de  $\mathbb{R}^*$ . Étudier la dérivabilité en 0.  
**b.** Tracer la courbe (C) représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

2. a. Vérifier que :

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}.$$

Déterminez une primitive de la restriction de  $f$  à  $[0; +\infty[$ .

b. On considère un réel  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ).

$M$  étant un point de coordonnées  $(x; y)$  déterminez l'aire  $\mathcal{A}_\lambda$  de l'ensemble des points  $M$  vérifiant

$$\begin{cases} 0 & \leq x \leq \lambda \\ f(x) & \leq y \leq 1 \end{cases}$$

c.  $\mathcal{A}_\lambda$  a-t-elle une limite finie lorsque  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ ?

3. a. Soit  $y \in ]0; 1[$ .

Montrer que  $y$  admet exactement deux antécédents  $x$  et  $z$  par  $f$  tels que  $xz < 0$ .

Calculer  $z$  en fonction de  $x$  lorsque  $x > 0$

Calculer  $z$  en fonction de  $x$  lorsque  $x < 0$

b. Étudiez le cas  $y = 0$

c. Soit,  $\varphi$  ainsi définie

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, & \varphi(x) = z \\ & \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

Exprimer  $\varphi(x)$ .

Étudiez la continuité de  $\varphi$ .

Montrer que  $\varphi$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et sur  $] -\infty; 0[$ .  $\varphi$  est-elle dérivable en 0?

Étudiez la limite de  $\varphi(x) + x - \log 2$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  ou vers  $-\infty$ .

Qu'en déduire pour la courbe  $(\Gamma)$  représentative de  $\varphi$  dans  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ? La tracer.

### Partie B

Plus généralement, soit une fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  possédant les propriétés suivantes :

$\alpha$ .  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , dérivable en tout point de  $\mathbb{R}^*$

$\beta$ .  $\forall x \in ]-\infty; 0[, \quad f'(x) < 0$

$\gamma$ .  $\forall x \in ]0; +\infty[ \quad f'(x) > 0$

$\delta$ .  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$  où  $\ell \in \mathbb{R}$ .

1. On note  $f_1$  la restriction de  $f$  à  $]0; +\infty[$  et  $f_2$  sa restriction à l'intervalle  $] -\infty; 0[$ .

Justifier l'existence de  $f_1^{-1}$  et de  $f_2^{-1}$ .

Ceci permet de démontrer que tout  $y$  appartenant à  $]f(0); \ell[$  admet exactement deux antécédents  $x$  et  $z$  par  $f$  tels que  $xz < 0$ .

2. Soit  $\varphi$  définie par

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, & \varphi(x) = z \\ & \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que  $\forall x < 0 \quad \varphi(x) = f_2^{-1} \circ f(x)$   
 $\forall x < 0 \quad \varphi(x) = f_1^{-1} \circ f(x)$

Étudier la continuité de  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}$ .

3. Montrer que  $\varphi$  est dérivable en tout point de  $\mathbb{R}^*$  et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \varphi'(x) = \frac{f'(x)}{f'(\varphi(x))}.$$

Étudiez les variations de  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}$ .

Établir que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty$  et que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = +\infty$ .

4. Montrer que  $\varphi \circ \varphi = \mathbf{1}_{\mathbb{R}}$  ( $\mathbf{1}_{\mathbb{R}}$  : fonction identité de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ). Qu'en déduire pour la courbe représentative de  $\varphi$  dans un repère orthonormé?
5. Peut-on déterminer simplement une famille de fonctions  $f$  telle que l'application  $\varphi$  associée soit  $-\mathbf{1}_{\mathbb{R}}$ ?