

∞ Baccalauréat C Montréal juin 1979 ∞

EXERCICE 1

3 POINTS

On considère dans \mathbb{C} l'équation en z :

$$(1) \quad z^6 - 9iz^3 + 18 - 26i = 0$$

et l'équation en Z :

$$(2) \quad Z^3 - 1 = 0.$$

1. Montrer que $(2 + i)$ et $(1 - i)$ sont des racines de l'équation (1).
2. Résoudre l'équation (2).
3. Montrer que si z_0 est une racine de (1) et Z_0 une racine de (2), alors $z_0 Z_0$ est une racine de (1). En déduire l'ensemble des racines de l'équation (1).

EXERCICE 2

4 POINTS

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\log x}{x}.$$

(log désignant le logarithme népérien).

1. Étudier les variations de f et construire sa courbe représentative (\mathcal{C}) dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).

Calculer les abscisses x_1, x_2, x_3, x_4 des points M_1, M_2, M_3, M_4 suivants :

- M_1 : intersection de \mathcal{C} et de l'axe $x'Ox$,
- M_2 : point de \mathcal{C} où la tangente à \mathcal{C} passe par l'origine O du repère,
- M_3 : point de \mathcal{C} où la tangente est parallèle à l'axe $x'Ox$,
- M_4 : en x_4 la dérivée seconde de f s'annule.

Démontrer que les nombres x_1, x_2, x_3, x_4 sont quatre termes consécutifs d'une suite géométrique.

PROBLÈME

13 POINTS

Les questions C 1., 2., 3. et 4. peuvent être traitées indépendamment de celles qui précèdent

Soit \mathcal{M} l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

On rappelle que \mathcal{M} , muni de l'addition des matrices et de la multiplication d'une matrice par un réel, est un espace vectoriel sur \mathbb{R} , et que \mathcal{M} , muni de l'addition des matrices et de la multiplication des matrices est un anneau unitaire.

Partie A

Soit A, I, O les trois matrices de \mathcal{M} suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On désigne par E le sous-espace vectoriel de \mathcal{M} engendré par A et I , (c'est-à-dire : M est élément de E si et seulement si il existe deux nombres réels a et b tels que : $M = aA + bI$).

1. Montrer que (A, I) est une base de E .
2. Montrer que $A^2 + A - 12I = 0$.

Montrer que E , muni de l'addition des matrices et de la multiplication des matrices, est un anneau commutatif unitaire.

Partie B

Soit P un plan vectoriel euclidien et (\vec{i}, \vec{j}) une base orthonormée de P .

On notera φ_M l'endomorphisme de P dont la matrice dans la base (\vec{i}, \vec{j}) est M .

1. Déterminer par leurs coordonnées dans la base (A, I) les matrices de E qui vérifient la relation :

$$M^2 = I.$$

2. Déterminer dans chaque cas la nature et les éléments de l'endomorphisme φ_M correspondant. On notera S_1 et S_2 les endomorphismes obtenus distincts de l'identité de P et de l'homothétie de rapport -1 ,

Partie C

Soit \mathcal{P} un plan affine euclidien associé à P et $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de \mathcal{P} .

Soit f et g deux fonctions réelles de la variable réelle :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{12} (11x + 7\sqrt{x^2 + 2})$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{12} (11x - 7\sqrt{x^2 + 2})$$

1. Étudier les variations de f . Vérifier que les droites d'équation $y = \frac{3}{2}x$ et $y = \frac{1}{3}x$ sont asymptotes à la courbe \mathcal{C}_1 représentation graphique de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Construire \mathcal{C}_1 .

2. Soit \mathcal{C}_2 la représentation graphique de g dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 (On ne demande pas l'étude des variations de g).
 Soit Δ la droite affine dont une équation est $11x - 12y = 0$ et σ la symétrie affine de \mathcal{P} par rapport à Δ dont la direction est la droite vectorielle engendrée par \vec{j} .
 Démontrer que $\mathcal{C}_2 = \sigma(\mathcal{C}_1)$.
 Dessiner \mathcal{C}_2 sur la même figure que \mathcal{C}_1 .
3. Soit \mathcal{C} la réunion de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .
 Montrer qu'un point N de \mathcal{P} de coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ appartient à \mathcal{C} si et seulement si :

$$(3x - 2y)(x - 3y) - \frac{49}{12} = 0.$$

4. Soit $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.
 Montrer que (O, \vec{u}, \vec{v}) est un repère de \mathcal{P} .
 Quelle est l'équation de \mathcal{C} dans ce repère?
 Quelle est la nature de \mathcal{C} ?
5. Soit Σ_1 et Σ_2 les applications affines de \mathcal{P} qui laissent le point O invariant et dont les endomorphismes associés sont respectivement S_1 et S_2 définis en partie B 2.
 Soit N un point de \mathcal{P} , N_1 son image par Σ_1 , N_2 son image par Σ_2 .
 On désigne par $(X; Y)$ les coordonnées de N dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) , par $(X_1; Y_1)$ celles de N_1 et par $(X_2; Y_2)$ celles de N_2 .
 Exprimer X_1 et Y_1 en fonction de X et de Y .
 Exprimer X_2 et Y_2 en fonction de X et de Y .
 Montrer que $\Sigma_1(\mathcal{C}) = \Sigma_2(\mathcal{C})$.