

☞ Baccalauréat C Montréal – New York juin 1966 ☞
Mathématiques et mathématiques et technique

I.

Déterminer les entiers relatifs n tels que l'entier

$$N = n^2 - 3n + 6$$

soit divisible par 5.

II.

Calculer les racines carrées du nombre complexe

$$z = 1 + 4i\sqrt{5}.$$

Préciser le module de ces racines et donner des valeurs approchées de leurs arguments.

III.

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé xOy .

On désigne par E l'ensemble des points de (P) n'appartenant pas à la droite Ox.

Au point M de E, de coordonnées x et y on fait correspondre le point M' de (P), de coordonnées x' et y' , obtenu de la manière suivante :

M' est le point d'intersection de la droite perpendiculaire en O à OM et de la droite parallèle à Oy menée par M.

Cette correspondance est une transformation ponctuelle, qu'on désigne par \mathcal{F} .

1. Montrer que la restriction de \mathcal{F} à l'ensemble des points de E d'abscisse non nulle est involutive et que

$$x' = -x \quad \text{et} \quad y' = \frac{-x^2}{y}.$$

2. Soit (Δ) une droite parallèle à Oy. Quel est l'ensemble de points décrit par M' quand M décrit l'intersection de E et de (Δ) ?

Soit M'' le symétrique de M' par rapport à la droite Ox. Montrer que les cercles de diamètre MM'' restent orthogonaux à un cercle fixe et appartiennent à un faisceau, que l'on précisera.

3. Soit (D) une droite strictement parallèle à Ox.

Quelle est la transformée de (D)?

Soit M un point de (D). On désigne par L le point défini par

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OL}.$$

Montrer que L décrit une parabole, (P_1) , dont on précisera le foyer et la tangente au sommet.

Écrire l'équation de la tangente en L à (P_1) et montrer qu'elle passe par M.

4. Soit m un paramètre réel et (Λ_m) la droite d'équation

$$y = -(mx + m + 2).$$

Montrer que les droites (Λ_m) passent par un point fixe.

Utiliser ce résultat et la transformation \mathcal{T} pour montrer que les courbes (Γ_m) d'équation cartésienne

$$y = \frac{x^2}{mx + m + 2}$$

passent par deux points fixes, que l'on déterminera.

Dans le cas où $m = 1$, étudier les variations de y et tracer la courbe, (Γ_1) .

N. B. - Les questions 3. et 4. sont indépendantes.