

∞ **Baccalauréat Montréal et New York juin 1964** ∞
mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

Montrer que l'équation

$$x^4 + x^2 + 1 = 0$$

a, dans le corps des complexes, quatre racines, que l'on calculera (donner pour chacune le module et l'argument, ainsi que la partie réelle et la partie imaginaire).

EXERCICE 2

Dans un repère orthonormé $X'X, Y'Y, Z'Z$, soit (S) la sphère de rayon 1 centrée à l'origine O des coordonnées.

1. Calculer le volume (arithmétique) $V(x)$ de (S) compris entre les plans $X = a$ et $X = x$.
2. Représenter graphiquement la fonction $y = V(x)$.
3. Cette courbe a un point anguleux pour $x = a$.

Calculer la valeur de a pour que les deux demi-tangentes en ce point soient rectangulaires.

EXERCICE 3

On considère les deux points fixes, A et A', de coordonnées $(a; 0)$ et $(-a; 0)$ dans un repère orthonormé $x'Ox, y'Oy$.

On définit sur les points du plan une transformation T qui associe un point M' à tout point M de façon que les triangles OMA et OAM' soient directement semblables (quand les sommets se correspondent dans l'ordre ci-dessus). M est supposé non situé sur Ox.

1. Montrer que $OA^2 = OM \cdot OM'$ et en déduire que T est le produit commutatif d'une inversion de centre O et d'une symétrie par rapport à $x'x$.
 T est-elle involutive?
2. Calculer les coordonnées x et y de M en fonction de $Z' = OM'$ et de $\varphi' = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$, puis à l'aide de x' et y' seulement; montrer que

$$x = \frac{a^2 x'}{x'^2 + y'^2}, \quad y = -\frac{a^2 y'}{x'^2 + y'^2}.$$

M' est-il maintenant défini si M est sur Ox?

3. a. M décrit une droite passant par O.
Déterminer analytiquement et géométriquement l'ensemble des positions de M.

b. Écrire l'équation du cercle (Γ) de centre $\omega(\lambda, ; 0)$ orthogonal à celui de centre O et de rayon a .

Déterminer, analytiquement et géométriquement, le transformé de ce cercle (Γ) .

4. Soit B le point de coordonnées $(0 ; b)$. Équation du cercle de diamètre (AB) et transformé de ce cercle par T .

Solution géométrique.

En déduire que AM' est toujours tangente au cercle passant par A, O, M .

5. Équation et transformé d'un cercle donné (C) passant par A et A' , de centre $\Omega(0 ; \rho)$.

Quand M varie sur (C) la droite MM' passe alors par un point fixe, D , de $y'y$.

Si k désigne le milieu de MM' , I celui de AM et I' celui de AM' , peut-on en conclure que, quelle que soit la position de M , les points A, O, I, I' sont cocycliques, ainsi que A, Ω, D, K , de même que A, A', M, M' ?

N. B. - Les questions 3, 4, 5 sont indépendantes.