Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Nancy juin 1969 ∾

EXERCICE 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $x\text{O}y$. Soit a et b deux nombres complexes et $\sum$ l'application qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = az + b$.
Déterminer a et b pour que $\sum$ soit la similitude d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ de rapport 2, dont le centre a pour coordonnées $+2$ et -1.
Calculer alors les coordonnées, x' et y', de M' en fonction des coordonnées, x et y, de M.

EXERCICE 2

Déterminer tous les couples $(x~;~y)$ d'entiers relatifs tels que

$$55x = 16y.$$

Sachant que le couple $x = 7,~y = 24$ est solution de l'équation

$$55x - 16t = 1,$$

déterminer tous les couples $(x~;~y)$ d'entiers relatifs tels que

$$55x - 16y = 3.$$

PROBLÈME

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox et Oy, on considère la droite (D) d'équation $y = x + 2$ et le point A de coordonnées $(+3~;~+1)$. On désigne par (C) le cercle de centre A tangent à (D), par B le point de contact de (C) avec (D) et par M un point variable de la droite (D), M différent de B.

1. Soit $\mathcal{I}$ l'inversion de pôle M et de puissance $M\text{B}^2$.
   Déterminer l'image par $\mathcal{I}$ d'un cercle tangent à (D) en M. En déduire qu'il existe un cercle (Γ) et un seul tangent à (D) en M et orthogonal à (C) ; construire ce cercle.
2. Montrer que (Γ) est tangent extérieurement au cercle (C_1) de diamètre AB.
   En déduire l'ensemble $(\mathcal{P})$ parcouru par le centre, ω, de (Γ) lorsque M parcourt (D). (On conviendra que, si $M = \text{B}$, alors $\omega = \text{B}$.)
   Déterminer l'équation cartésienne de $(\mathcal{P})$.
3. On considère la fonction f qui, à tout nombre réel x appartenant à l'intervalle fermé $[0~;~+4]$, associe le nombre réel

   $$f(x) = 4\sqrt{x} - x.$$

   Montrer que le graphe de f est une partie de $(\mathcal{P})$. Montrer que f admet une fonction réciproque, g, que l'on calculera et dont on précisera l'ensemble de définition et l'ensemble des valeurs.
   Tracer dans un même repère orthonormé les courbes représentatives de f et g.

4. Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle fermé $[0~;~+4]$.
Calculer les intégrales

$$I(a) = \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J(a) = \int_0^{f(a)} g(y)\,\mathrm{d}y.$$

(On rappelle que la dérivée de $x^{\frac{3}{2}}$ est $\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.)
Vérifier que $I(a) + J(a) = af(a)$; interpréter géométriquement cette dernière relation.