

♣ Baccalauréat C Nancy juin 1971 ♣

EXERCICE 1

Déterminer tous les entiers naturels n tels que

$$5^n - 2 \equiv 0 \pmod{7}.$$

EXERCICE 2

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les coordonnées d'un point mobile M sont données en fonction du temps t par

$$\begin{cases} x = 2 + 4 \sin t \cos t, \\ y = 1 + \cos 2t. \end{cases}$$

1. Donner une équation cartésienne de la trajectoire de M et la construire.
2. Définir, à l'instant t , le vecteur vitesse de M et le vecteur accélération. Construire le point M , le vecteur vitesse de M et le vecteur accélération de M pour $t = \frac{\pi}{6}$.

PROBLÈME

Soit E l'ensemble des fonctions réelles f , définies et deux fois dérivables sur \mathbb{R} , telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait

$$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0.$$

1.
 - a. Démontrer qu'une fonction réelle f définie sur \mathbb{R} appartient à E si, et seulement si, la fonction g définie par $x \mapsto e^{-x} f(x)$ est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et telle que $g''(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 - b. À tout couple (λ, μ) de nombres réels on fait correspondre la fonction réelle $f_{\lambda, \mu}$ définie sur \mathbb{R} par

$$f_{\lambda, \mu}(x) = (\lambda + \mu x)e^x.$$

Montrer que, pour toute fonction f de E , il existe un couple (λ, μ) et un seul tel que $f = f_{\lambda, \mu}$.

- Dans la suite du problème on appellera « coordonnées de f » ce couple (λ, μ) .

2.
 - a. Étudier les fonctions $f_{1, 0}$ et $f_{0, 1}$; construire leurs courbes représentatives $(C_{1, 0})$ et $(C_{0, 1})$ dans un même plan rapporté à un repère orthonormé. Étudier la position relative des deux courbes.
 - a. Montrer que la dérivée de toute fonction f de E appartient aussi à E et déterminer les coordonnées de f' en fonction de celles de f .
En désignant par D l'application de E dans E qui à toute fonction $f \in E$ associe sa dérivée, montrer que D est une bijection et définir l'application D^{-1} .

- b.** Dédurre de ce qui précède une primitive de $f_{\lambda, \mu}$.
Calculer l'aire a_m de la partie du plan limitée par les courbes $(C_1, 0)$, $(C_0, 1)$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = -m$, où m désigne un nombre réel positif. L'aire a_m a-t-elle une limite lorsque m tend vers $+\infty$?
- 3. a.** Soit a un nombre réel donné. À toute fonction f de E on associe la fonction que l'on notera f_a , définie sur \mathbb{R} par $f_a(x) = f(x + a)$.
Démontrer que f_a appartient à E et déterminer ses coordonnées en fonction de celles de f .
Soit T_a l'application de E dans E qui à toute fonction $f \in E$ associe la fonction f_a .
- b.** Montrer que l'on a

$$T_a \circ T_b = T_{a+b},$$

quels que soient les nombres réels a et b .

Définir la fonction $T_a(f_1, 0)$ et la comparer avec la fonction $f_1, 0$.

En déduire que $T_a = T_0$ implique $a = 0$ et que, par suite, $T_a = T_b$ si, et seulement si, $a = b$.