

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1975 Nancy ∞

EXERCICE 1

1. Trouver l'ensemble des entiers naturels qui divisent 276.
2. Trouver les paires d'entiers naturels dont le plus grand diviseur commun d et le plus petit multiple commun m vérifient

$$\begin{cases} m + 3d = 276 \\ 10 < d < 30 \end{cases}$$

EXERCICE 2

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points A, B et O' ayant pour coordonnées respectivement $(a; 0; 0), (0; b; 0), (0; 0; c)$.
Soit C le point tel que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$ et soit A', B', C' les points définis par $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{OO'}$.

Soit S_1, S_2 et S_3 les symétries orthogonales ayant pour axes respectivement OA, BB' et $A'C'$.

1. La transformation $T = S_3 \circ S_2 \circ S_1$ est-elle un déplacement ou un antidéplacement?
2. Quelle est l'application linéaire associée à T ?
3. Déterminer la nature géométrique de T .

PROBLÈME

1. On désigne par G l'espace vectoriel réel des applications polynomiales, de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , de degré au plus égal à 2. On rappelle que G est de dimension 3.
Soit a un nombre réel tel que $a^2 \neq 1$. On considère les trois applications polynomiales R_a, S_a, T_a définies de la manière suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$R_a(x) = \frac{(x-1)(x-a)}{2(1+a)}, \quad S_a(x) = \frac{x^2-1}{a^2-1}, \quad T_a(x) = \frac{(x+1)(x-a)}{2(1-a)}$$

- a. Calculer les valeurs de R_a, S_a, T_a aux points $-1, a, 1$ et en déduire que ces trois applications polynomiales sont linéairement indépendantes.
Constituent-elles une base de \mathcal{E} ?
- b. Soit α, β et γ des nombres réels. Montrer qu'il existe un et un seul élément P de \mathcal{E} tel que

$$P(-1) = \alpha, \quad P(a) = \beta, \quad P(1) = \gamma$$

en cherchant à exprimer P à l'aide de R_a, S_a, T_a .

2. a. Soit f l'application de $[-1 ; 1]$ dans \mathbb{R} définie par

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3+x} + \frac{1}{3-x} \right), \quad -1 \leq x \leq 1$$

Calculer $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

- b. Déterminer l'élément Q_0 de \mathcal{E} qui prend aux points $-1, 0, 1$ les mêmes valeurs que f et calculer $Q_0(x) - f(x)$ ainsi que $\int_{-1}^1 Q_0(x) dx$.

- c. On pose $\Delta = \int_{-1}^1 (Q_0(x) - f(x)) dx$.

En minorant et majorant $9 - x^2$ lorsque $|x| \leq 1$, montrer que

$$\frac{1}{819} \leq \Delta \leq \frac{1}{720}.$$

- d. En déduire un encadrement de $\text{Log } 2$ par des nombres décimaux dont la différence est $16 \cdot 10^{-5}$.
3. On considère à nouveau, lorsque $a^2 \neq 1$, les polynômes R_a, S_a, T_a introduits en 1.
- a. Calculer les intégrales

$$\int_{-1}^1 R_a(x) dx, \quad \int_{-1}^1 S_a(x) dx, \quad \int_{-1}^1 T_a(x) dx$$

- b. On suppose que $(a^2 - 1)(a^2 - 9) \neq 0$. Soit Q_a l'élément de \mathcal{E} qui prend aux points $-1, a, 1$ les mêmes valeurs que f . Calculer

$$I(a) = \int_{-1}^1 Q_a(x) dx.$$

(Il est conseillé de vérifier que pour $a = 0$ on obtient le résultat trouvé en 2. b.)

- c. Étudier les variations de $I(a)$ lorsque a parcourt l'intervalle $] -1 ; 1[$.
- d. En déduire qu'il existe un nombre a_0 tel que

$$-1 < a_0 < 1 \quad \text{et} \quad I(a_0) = \text{Log } 2$$