Durée : 4 heures

Baccalauréat C Nancy juin 1976

EXERCICE 1

On définit la suite de terme général u_n par

$$\left\{\begin{array}{ll} u_0 \in \mathbb{N}, & u_0 \geqslant 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{array}\right.$$

1. On pose $v_n = u_n - 3$.
   Montrer que la suite (v_n) ainsi définie est une suite géométrique. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de u_0 et de n.
2. Quels sont les nombres entiers u_0 ($u_0 \geqslant 4$) tels que, pour tout n, 3^{u_n} soit le cube d'un entier naturel ?
3. On suppose $u_0 = 4$; déterminer toutes les valeurs de n telles que $3^{u_n} - 1$ soit un multiple de 11.

EXERCICE 2

On considère le polynôme :

$$P(z) = z^3 - 4\mathrm{i}z^2 - (7 + 2\mathrm{i})z - 6 + 12\mathrm{i}.$$

1. Trouver une racine réelle α de l'équation $P(z) = 0$.
2. Calculer les nombres complexes a et b, tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = (z - \alpha)\left(z^2 + az + b\right).$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

PROBLÈME

On désigne par $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension 2, rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Partie A

Soit (H) la courbe représentative dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^\star$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{\sqrt{3}}{2x}.$$

1. Étudier la fonction f et tracer (H).

2. On appelle (D) celle des asymptotes de (H) qui n'est parallèle à aucun des axes, et (Δ) celle des bissectrices des droites (D) et $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ qui rencontre (H).

   Déterminer une mesure des angles $\left(\widehat{\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath}\right),\ (D)}\right)$ et $\left(\widehat{\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath}\right),\ (\Delta)}\right)$.

3. Soit a un nombre réel supérieur ou égal à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; on désigne par (D_a) la droite d'équation $x = a$.

   Calculer l'aire de la partie du plan, située dans le demi-plan $x > 0$, limitée par les droites (D), (Δ), la courbe (H) et la droite (D_a). Trouver a tel que cette aire soit égale à $\sqrt{3}$.

Partie B

Soit $\overrightarrow{I}$ un vecteur unitaire de (Δ).

1. Déterminer un vecteur $\overrightarrow{J}$, tel que $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J}\right)$ soit un repère orthonormé.
2. Donner l'équation de (H) dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J}\right)$.
3. Quelle est la nature de la conique (H) ? On précisera ses éléments dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{I},\ \overrightarrow{J}\right)$: sommets, foyers, directrices, excentricité.

Partie C

On considère l'ensemble G des isométries du plan euclidien $\mathscr{E}$ laissant la courbe (H) globalement invariante.

1. Montrer que la loi de composition des applications est une loi interne sur G, et que G muni de cette loi a une structure de groupe.
2. Montrer qu'une isométrie g est élément de G si et seulement si g conserve l'ensemble des foyers de (H).
3. En déduire tous les éléments de G.
4. Donner la table de composition du groupe G ; ce groupe est-il commutatif ?

Partie D

Soit M un point de $\mathscr{E}$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$, animé d'un mouvement déterminé par

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \sqrt{3}\mathrm{e}^{t} \\ y(t) & = & \mathrm{e}^{t} + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} \end{array}\right.$$

1. Déterminer la trajectoire du point M et le sens de parcours.
2. Calculer les vecteurs vitesse et accélération du point M.

   Préciser à quels instants et sur quelles parties de la trajectoire le mouvement est accéléré ou retardé.