

## ♣ Baccalauréat C Nancy juin 1977 ♣

### EXERCICE 1

3 POINTS

Soit  $n$  un entier strictement supérieur à 2. Si  $p$  est un entier relatif ( $p \in \mathbb{Z}$ ) nous noterons par  $\bar{p}$  la classe de  $p$  modulo  $n$  ( $\bar{p} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ).

On note par  $S_n$  l'ensemble des  $x$  de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  qui vérifient  $x^2 + \bar{1} = \bar{0}$ .

1. a. Démontrer que pour chaque  $n$  ( $n > 2$ )  $\bar{0}$ ,  $\bar{1}$  et  $\overline{-1}$  ne sont pas dans  $S_n$ .
- b. Démontrer que si  $x \in S_n$  et si  $y \in S_n$  on a alors

$$(x - y)(x + y) = \bar{0}.$$

- c. Démontrer que si  $x \in S_n$ , alors  $-x \in S_n$ ; montrer que si  $n$  est premier,  $S_n$  est vide ou a exactement deux éléments.
2. Résoudre l'équation  $x^2 + \bar{1} = \bar{0}$  dans chacun des cas suivants :  $n = 5$ ,  $n = 7$ ,  $n = 6$ ,  $n = 10$ .

### EXERCICE 2

4 POINTS

Soit  $\mathbb{R}_+$  l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls; soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$  définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} f(0) = 0, \text{ et} \\ f(x) = x^2 \ln(x) \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

1. Étudier  $f$  et construire sa représentation graphique dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé; on donne  $\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,61$  et  $\frac{1}{e} \approx 0,37$ . (On étudiera la dérivabilité de  $f$  en 0).
2. Soit  $g$  l'application de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$g(x) = \int_1^x f(t) dt, \quad x \geq 0.$$

- a. Justifier l'existence de  $g$ .
- b. Calculer explicitement  $g(x)$  pour  $x > 0$ .
- c. Calculer  $g(0)$ ; en déduire l'aire de la partie du plan définie par :

$$\{0 \leq x \leq 1 \text{ et } f(x) \leq y \leq 0\}.$$

### PROBLÈME

13 POINTS

Soit  $E$  un espace affine de dimension 3 rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

#### Partie A

On appelle A, B, C, D les points de  $E$  définis respectivement par les triplets de coordonnées suivants :

$$(1; -1; 0); (2; 0; 1); (-1; 1; 0) \text{ et } (-2; 0; 1).$$

Soit  $\lambda$  et  $\mu$  des nombres réels; on désigne par  $P$  le barycentre des points pondérés (A,  $1 + \lambda$ ) et (B,  $\lambda$ ) et par  $Q$  le barycentre des points pondérés (C,  $1 + \lambda$ ) et (D,  $-\lambda$ ).

Enfin on appelle  $G$  le barycentre des points pondérés  $\left(P, \frac{1+\mu}{2}\right)$  et  $\left(Q, \frac{1-\mu}{2}\right)$ .

1. a. Calculer, en fonction de  $\lambda$ , les coordonnées des points  $P$  et  $Q$ .
- b. Démontrer que les coordonnées de  $G$  sont :

$$(\lambda + \mu; \lambda - \mu; \lambda \times \mu).$$

2. a. Le réel  $\lambda$  étant supposé fixé, montrer que l'ensemble des points  $G$  obtenus quand  $\mu$  varie est une droite  $D_\lambda$ .
- b. Représenter  $D_\lambda$  par un système d'équations cartésiennes.
3. a. Le réel  $\mu$  étant fixé, montrer que l'ensemble des points  $G$  obtenus quand  $\lambda$  varie est une droite  $D_\mu$ .
- b. Représenter  $D_\mu$  par un système d'équations cartésiennes.
4. Montrer que l'ensemble  $\mathcal{S}$  des points  $G$  obtenus quand  $\lambda$  et  $\mu$  décrivent  $\mathbb{R}$  est l'ensemble des points  $M$  de l'espace dont les coordonnées vérifient

$$x^2 - y^2 = 4z.$$

5. Reconnaitre  $\mathcal{S}$ .

### Partie B

1. Déterminer l'intersection de l'ensemble  $\mathcal{S}$  défini au A 4. avec chacun des trois plans d'équation  $x = 0$ ,  $z = 0$  et  $z = 1$ .  
Représenter les trois ensembles obtenus sur des figures séparées en rapportant chacun des plans considérés à un repère orthonormé simple.
2. Soit  $K$  et  $K'$  les points de coordonnées  $(0; 0; 1)$  et  $(0; 0; -1)$  respectivement.  
On désigne par  $L$  la droite passant par  $K$  et de vecteur directeur  $\vec{j}$ , et par  $L'$  la droite passant par  $K'$  et de vecteur directeur  $\vec{i}$ .  
Soit  $M$  le point de  $E$  de coordonnées  $(x; y; z)$ ; montrer que la projection orthogonale  $H$  de  $M$  sur  $L$  a pour coordonnées  $(0; y; 1)$ , et que la projection orthogonale  $H'$  de  $M$  sur  $L'$  a pour coordonnées  $(x; 0; -1)$ .  
Montrer que  $\mathcal{S}$  est l'ensemble des points  $M$  de  $E$  situés à égale distance de  $L$  et de  $L'$ .

### Partie C

On désigne par  $V$  l'espace vectoriel associé à  $E$ . Si  $\varphi$  est un réel vérifiant  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ , on désigne par  $F_\varphi$  l'endomorphisme de  $V$  défini par :

$$\begin{cases} F_\varphi(\vec{i}) &= (-\cos 2\varphi)\vec{j} + (\sin 2\varphi)\vec{k} \\ F_\varphi(\vec{j}) &= -\vec{i} \\ F_\varphi(\vec{k}) &= (-\sin 2\varphi)\vec{j} + (-\cos 2\varphi)\vec{k} \end{cases}$$

1. Montrer que  $F_\varphi$  est un endomorphisme orthogonal de  $V$ , et montrer que l'ensemble des vecteurs de  $V$  invariants par  $F_\varphi$  est la droite vectorielle dont un vecteur directeur est  $\vec{i} - \vec{j} + (\tan \varphi)\vec{k}$ .
2. Soit  $f_\varphi$  l'application affine de  $E$  dans  $E$  dont l'endomorphisme associé est  $F_\varphi$  et telle que  $f_\varphi(K)$  soit le point  $K_1$  de coordonnées  $(2 \tan \varphi ; 0 ; 1)$ , où  $K$  est le point de coordonnées  $(0 ; 0 ; 1)$ .
  - a. Définir analytiquement  $f_\varphi$ .
  - b. Montrer qu'il existe des points de  $E$  invariants par  $f_\varphi$  (on pourra chercher des points invariants dont la première coordonnée est nulle). En déduire que  $f_\varphi$  est une rotation dont on déterminera l'axe  $\delta_\varphi$ .
  - c. Montrer que  $\delta_\varphi$  est inclus dans  $\mathcal{S}$  et que  $f_\varphi(L) = L'$  où  $L$  et  $L'$  sont les droites que l'on a définies au B 2.

#### Partie D

Soit  $r$  une rotation (affine) telle  $r(L) = L'$ . On désigne par  $\delta$  l'axe de  $r$ , et par  $R$  la rotation vectorielle associée à  $r$ .

Montrer que l'on a  $R\left(\vec{j}\right) = \vec{i}$  ou  $R\left(\vec{j}\right) = -\vec{i}$

Montrer que la droite  $\delta$  est contenue dans  $\mathcal{S}$ .