

∞ Baccalauréat C Nancy-Metz juin 1983 ∞

**EXERCICE 1**

**3 POINTS**

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée directe  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et soit  $\mathcal{E}$  un espace affine associé de repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

1. On définit l'endomorphisme  $\varphi$  de  $E$  par

$$\begin{cases} \varphi(\vec{i}) &= -\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k} \\ \varphi(\vec{j}) &= \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k} \\ \varphi(\vec{k}) &= \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k} \end{cases}$$

Montrer que  $\varphi$  est une isométrie vectorielle. Préciser la nature de  $\varphi$  et les éléments géométriques qui la caractérisent.

2. Démontrer que l'application affine  $f$  de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$  qui admet  $\varphi$  comme endomorphisme associé et qui transforme  $O$  en  $O'$  de coordonnées  $(-1; 1; 1)$  est un vissage dont on déterminera l'axe, l'angle et le vecteur.

**EXERCICE 2 (DEVRAIT ÊTRE UN SUJET D'ARITHMÉTIQUE)**

**3 POINTS**

**PROBLÈME**

**3 POINTS**

Dans ce problème  $\mathcal{P}$  désigne un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  et  $\text{Log } x$  désigne le logarithme népérien de  $x$ .

**Partie A**

Soit  $f$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par

$$f(x) = x + \frac{1 - e^x}{1 + e^x}.$$

1. Après avoir montré que  $f$  est une fonction impaire, étudier les variations de  $f$  et construire, dans  $\mathcal{P}$ , sa courbe représentative notée  $C$ .
2. Vérifier, pour tout  $x$  réel, la relation

$$2f'(x) - 1 = [f(x) - x]^2.$$

3. Déterminer les primitives de la fonction  $h : x \mapsto \frac{1}{1 + e^x}$

(on pourra remarquer que  $1 - \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{1}{1 + e^x}$ ).

Si  $\lambda$  est un nombre réel positif, calculer l'aire  $\mathcal{A}(\lambda)$  du domaine limité par la courbe  $C$  et les droites dont les équations respectives sont  $y = x - 1$ ,  $x = 0$  et  $x = \lambda$ .

Quelle est la limite de cette aire lorsque  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ ? (Il est conseillé d'écrire  $\mathcal{A}(\lambda)$  sous la forme d'un logarithme unique).

### Partie B

Pour tout nombre réel  $a$ , on définit les applications  $S_a$  et  $T_a$  de  $\mathcal{P}$  dans lui-même comme suit : à un point  $M$  de coordonnées  $(x ; y)$  dans le repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  on associe les points  $S_a(M)$  de coordonnées  $(-x + 2a, -y + 2a)$  et  $T_a(M)$  de coordonnées  $(x + a ; y + a)$ .  
On notera  $\mathcal{G}$  l'ensemble des applications  $S_a$  et  $T_a$  pour tout  $a$  réel.

- Déterminer la nature géométrique des transformations  $S_a$  et  $T_a$ .
- Montrer que pour tout couple  $(a ; b)$  de nombres réels, les applications composées  $S_a \circ S_b$ ,  $T_a \circ T_b$ ,  $S_a \circ T_b$  et  $T_a \circ T_b$  appartiennent à  $\mathcal{G}$  et que  $\mathcal{G}$  est un sous-groupe du groupe des bijections affines de  $\mathcal{P}$  pour la loi de composition.  
Est-ce un sous-groupe commutatif? Montrer que l'on a, pour tout  $a$  réel,

$$(1) S_a = T_a \circ S_0 \circ T_a^{-1}.$$

- Dans cette question  $C$  désigne la courbe construite dans la partie A du problème.  
On note  $C_a$  l'image par  $T_a$  de la courbe  $C$ . Utiliser la relation (1) pour montrer que  $I$  de coordonnées  $(a ; a)$  est centre de symétrie de  $C_a$ . Montrer qu'il existe une fonction  $f_a$  telle que l'équation de  $C_a$  soit  $y = f_a(x)$ . Vérifier que  $f_a(x) = a + f(x - a)$ .

### Partie C

Notons  $E$  l'ensemble des fonctions  $g$  définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2g'(x) - 1 = [g(x) - x]^2.$$

- Montrer que  $E$  n'est pas vide. Montrer que les éléments de  $E$  sont des fonctions croissantes et deux fois dérivables.  
Calculer  $g''(x)$  en fonction de  $x$  et de  $g(x)$ . Quelles sont les valeurs possibles de la fonction dérivée  $g'$  en un point  $x_0$  tel que  $g''(x_0) = 0$ ?
- Caractériser les fonctions dont la dérivée seconde est identiquement nulle et qui appartiennent à  $E$ . Montrer que les fonctions  $f_a$  définies par  $f_a(x) = a + f(x - a)$ , où  $f$  est la fonction introduite dans la première question du problème et  $a$  un nombre réel, sont des éléments de  $E$ .
- Soit  $g$  un élément de  $E$  vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [g(x) - x]^2 \neq 1.$$

Montrer que la quantité  $\frac{g(x) - x - 1}{g(x) - x + 1}$  garde un signe constant quand  $x$  décrit  $\mathbb{R}$  et que la fonction

$$G : x \longmapsto \text{Log} \left| \frac{g(x) - x - 1}{g(x) - x + 1} \right|$$

est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Calculer la dérivée  $G'$  et en déduire qu'il existe une constante réelle  $c$  telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = x + c.$$

Montrer qu'il existe alors un nombre réel  $k$  non nul tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = x + \frac{1 + ke^x}{1 - ke^x}.$$