

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Nancy-Metz ∞

EXERCICE 1

4 points

1. Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation

$$17q - 11p = 2.$$

2. On désigne par \bar{n} la classe d'équivalence modulo 187 de l'entier $n \in \mathbb{Z}$.
Résoudre dans $\mathbb{Z}/187\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 - \bar{1} = 0$.

EXERCICE 2

4 points

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$z^2 - [(1 + 2i)u + 1]z + (-1 + z)u^2 + iu = 0$$

où z est l'inconnue complexe et u un paramètre complexe.

On appellera z' la racine qui est un polynôme du premier degré en u et dont le coefficient de u est $(1 + i)$, z'' l'autre racine.

2. Dans le plan affine euclidien, on appelle P le point d'affixe u , M' celui d'affixe z' , M'' celui d'affixe z'' .

Par quelles transformations du plan passe-t-on de P à M' ? (On appellera T_1 cette transformation et on explicitera ses éléments géométriques). Puis de P à M'' ? (On appellera T_2 cette transformation et on explicitera ses éléments géométriques.)

3. Par quelle transformation T passe-t-on alors de M' à M'' ?

Donner les éléments caractérisant T .

PROBLÈME

12 points

Partie A

On considère la fonction numérique de la variable réelle f définie par

$$f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f .
2. Déterminer une fonction polynôme P , de degré inférieur ou égal à 3, qui a même valeur et même nombre dérivé que f en 0 et 1.

3. Soit k la fonction numérique définie par

$$k(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x - 1.$$

Factoriser k et en déduire la position relative de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_P courbes représentatives respectives de f et P dans un même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé du plan. Tracer soigneusement \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_P . Faire figurer les tangentes aux points communs.

4. À l'aide d'un encadrement de $1+x$ pour $x \in [0; 1]$, montrer que

$$\frac{1}{240} < \int_0^1 k(x) dx < \frac{1}{120}.$$

5. Calculer $\int_0^1 k(x) dx$ et $\int_0^1 P(x) dx$.

6. Déduire des résultats précédents la valeur de $n \in \mathbb{N}$ telle que

$$\frac{n}{240} < \text{Log}2 < \frac{n+1}{240}.$$

Partie B

On désigne par E l'espace vectoriel sur \mathbb{R} constitué par la fonction nulle et les fonctions polynômes, à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3.

Soit h un réel strictement positif et φ l'application de E vers \mathbb{R}^4 telle que

$$\varphi(P) = (P(0), P'(0), P(h), P'(h)).$$

1. Quelle est la dimension de E ? Montrer que φ est une application linéaire bijective de E sur \mathbb{R}^4 .
2. Soit φ^{-1} , la bijection réciproque de φ . Déterminer $P_3 = \varphi^{-1}((0, 0, 1, 0))$ et $P_4 = \varphi^{-1}((0, 0, 0, 1))$.
3. Soit $P_1 = 1 - P_3$, et P_2 défini par $P_2(X) = -P_4(h - x)$.
Vérifier que $P_1 = \varphi^{-1}((1, 0, 0, 0))$ et $P_2 = \varphi^{-1}((0, 1, 0, 0))$.
4. Calculer pour i élément de $\{1, 2, 3, 4\}$ l'intégrale $\int_0^h P_i(t) dt$.
5. Montrer que tout élément P de E s'écrit comme une combinaison linéaire de P_1, P_2, P_3 et P_4 . En déduire la relation, pour P élément de E ,

$$\int_0^h P(t) dt = \frac{h}{2}(P(0) + P(h)) + \frac{h^2}{12}(P'(0) - P'(h)).$$

Partie C

Soit a un réel strictement positif et g une application de $[0; a]$ vers \mathbb{R} possédant des dérivées continues au moins jusqu'à l'ordre 4 sur $[0; a]$. Soit $h \in]0; a[$, et Q_h l'élément de E ayant même valeur et même nombre dérivé que g en 0 et h .

1. Montrer que g est intégrable sur $[0 ; h]$ et, en utilisant les résultats de la partie B, qu'on a la relation

$$\int_0^h g(t) dt - \int_0^h Q_h(t) dt = \int_0^h g(t) dt - \frac{h}{2}(g(0) + g(h)) - \frac{h^2}{12}(g'(0) - g'(h)).$$

2. Pour tout u de $[0 ; a]$, on pose

$$\Psi(u) = \int_0^u g(t) dt - \frac{u}{2}(g(0) + g(u)) - \frac{u^2}{12}(g'(0) - g'(u)).$$

Montrer que l'application Ψ ainsi définie est dérivable au moins jusqu'à l'ordre 3 sur $[0 ; a]$, que

$$\Psi(0) = \Psi'(0) = \Psi''(0) = 0$$

$$\text{et que } (\forall u \in [0 ; a]), \quad \left(\Psi^{(3)}(u) = \frac{u^2}{12} g^{(4)}(u) \right).$$

3. On pose $M = \sup_{t \in [0 ; a]} |g^{(4)}(t)|$.
Montrer successivement que

$$\begin{aligned} \forall x \in [0 ; a], \quad |\Psi''(x)| &\leq M \frac{x^3}{36}, \\ \forall y \in [0 ; a], \quad |\Psi'(y)| &\leq M \frac{y^4}{144}, \\ \forall z \in [0 ; a], \quad |\Psi(z)| &\leq M \frac{z^5}{720}. \end{aligned}$$

4. Montrer en utilisant les questions précédentes que

$$\int_0^a g(t) dt = \frac{a}{2}(g(0) + g(a)) + \frac{a^2}{12}(g'(0) - g'(a)) + \mathbb{R},$$

$$\text{avec } \mathbb{R} \leq \frac{a^5}{720} M.$$