

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Nantes juin 1972 ∞

EXERCICE 1

On considère la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$f(x) = x + 1 + 2e^{-2x}$$

1. Étudier les variations de f et tracer la courbe représentative (C) de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé dont l'un des axes est $x'Ox$.
2. Calculer l'aire du domaine plan limité par (C) , son asymptote et les droites ayant pour équations respectives $x = 0$ et $x = m$ ($m > 0$).
Quelle est la limite de cette aire quand m croît indéfiniment?

EXERCICE 2

Une personne a placé une somme, S . À la fin de chaque année, l'intérêt de ce placement est égal à $\frac{1}{25}$ de la somme due au début de cette même année; cette personne peut percevoir effectivement l'intérêt ou bien le laisser placé à son tour : en fait elle choisit cette seconde solution.

1. Quelle somme lui est-il dû à la fin de la deuxième année, de la troisième année, de la n -ième année ($n \in \mathbb{N}^*$)?
2. Pendant combien d'années, au moins, lui faudra-t-il poursuivre son placement pour qu'il lui soit dû une somme supérieure à $2S$?

PROBLÈME

Partie A

Soit E un plan vectoriel euclidien et (\vec{i}, \vec{j}) une base orthonormée de E . Une application linéaire, f , de E dans E admet pour matrice dans la base (\vec{i}, \vec{j})

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

(a et b sont des nombres réels donnés).

1. Déterminer l'ensemble (Δ) des vecteurs de E invariants par f . Quelles conditions faut-il imposer à a et à b pour que f soit la transformation identique de E ?
Lorsqu'il n'en est pas ainsi, démontrer que (Δ) est une droite vectorielle, dont on donnera un vecteur de base.

2. Déterminer le noyau, N , de f , c'est-à-dire l'ensemble, N , des vecteurs \vec{u} de E vérifiant $f(\vec{u}) = \vec{0}$.

À quelle condition N contient-il des vecteurs non nuls? Démontrer que, dans ce cas, N est une droite vectorielle, dont on donnera une base.

3. On suppose $a = b$.

a. Démontrer que (Δ) et N sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . Définir géométriquement l'application f .

b. On suppose, de plus, $a = b = 2$; démontrer que f est alors la projection orthogonale sur (Δ) .

On désigne par g la projection orthogonale sur N et par h la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à (Δ) ; si \vec{v} est un vecteur quelconque de E , quelles relations simples peut-on établir entre \vec{v} , $f(\vec{v})$, $g(\vec{v})$ et $h(\vec{v})$?

En déduire les matrices, dans la base (\vec{i}, \vec{j}) , de g et de h .

4. On suppose, dans cette question,

$$(a - b)(a - b - 1)(a - 1)b \neq 0.$$

On se propose d'étudier les vecteurs \vec{u} non nuls de E vérifiant $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$, où λ est un réel.

a. Démontrer qu'il existe deux valeurs, λ_1 et λ_2 de λ répondant à cette question.

b. Démontrer que les vecteurs \vec{u}_1 (resp. \vec{u}_2) associés à λ_1 (resp. λ_2) sont les vecteurs d'un sous-espace vectoriel (D_1) [resp. (D_2)] de E .

Indiquer une base de (D_1) et une base de (D_2) . Démontrer que (D_1) et (D_2) sont supplémentaires.

c. Démontrer que, à tout vecteur \vec{v} de E , on peut associer \vec{v}_1 de (D_1) et \vec{v}_2 de (D_2) de façon à obtenir

$$f(\vec{v}) = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2.$$

d. *Exemple*: $a = -1$, $b = 2$. Préciser (D_1) , (D_2) et $f(\vec{v})$.

Partie B

On considère le plan affine euclidien, (\mathcal{E}) , de direction E et rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit φ l'application affine associée à f et pour laquelle $O' = \varphi(O)$ est O : le transformé $M' = \varphi(M)$ d'un point quelconque M de (\mathcal{E}) est donc défini par $\vec{OM'} = f(\vec{OM})$.

On suppose de plus que l'on a $a = -1$ et $b = 2$.

1. Démontrer que l'expression analytique de φ , dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, est donnée par les relations

$$M(x; y) \longmapsto \varphi(M) = M'(x'; y'),$$

avec

$$\begin{cases} x' &= -x + 2y \\ y' &= 2x - y. \end{cases}$$

2. On considère le repère (O, \vec{I}, \vec{J}) défini par

$$\vec{I} = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \quad \vec{J} = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j}$$

Démontrer que, dans ce nouveau repère, l'expression analytique de φ est, avec $M(X; Y) \mapsto M'(X'; Y')$,

$$\begin{cases} X' &= -3X \\ Y' &= Y. \end{cases}$$

On pourra pour cela exprimer \vec{i} et \vec{j} en fonction de \vec{I} et de \vec{J} .

3. Soit (\mathcal{C}) le cercle dont l'équation dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0.$$

Quelle est l'équation de ce cercle dans le repère (O, \vec{I}, \vec{J}) ?

En déduire l'équation, la nature et les éléments remarquables de la courbe (\mathcal{C}') , transformée de (\mathcal{C}) par φ .

(Faire une figure précise en utilisant les résultats de la question précédente.)