

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Nantes juin 1975 ∞

EXERCICE 1

On considère l'ensemble $E_4 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et l'application p de E_4 dans \mathbb{R} qui, à tout élément k de E_4 associe $p(k) = \text{Log}(a^k)$, ou, a un réel strictement positif.

1. Déterminer a pour que $(E_4, \mathcal{P}(E_4), p)$ soit un espace probabilisé.
2. On donne à a la valeur trouvée ci-dessus et on considère la variable aléatoire X définie sur $(E_4, \mathcal{P}(E_4), p)$ et associant à chaque élément k de E_4 le nombre $p(k)$.
Calculer l'espérance mathématique de X , sa variance et son écart-type.
3. Généraliser les résultats précédents à l'ensemble

$$E_n = \{k \mid k \in \mathbb{N}, k \leq n\}$$

où n est un entier naturel non nul.

On rappelle :

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

EXERCICE 2

Soit f une fonction numérique définie sur \mathbb{R} par

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} : & f(x+2) = f(x) \\ \forall x \in [0; 2[: & f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx \end{cases}$$

où b, c, d sont des nombres réels.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'axes $x'Ox, y'Oy$.

1. Déterminer $f(2)$.
Trouver sous la forme d'une relation entre b, c et d , une condition nécessaire et suffisante pour que f soit continue sur \mathbb{R} .
2. Déterminer b, c et d de manière que f soit continue sur \mathbb{R} et que, de plus, (C) admette le point $I\left(1; -\frac{1}{2}\right)$ comme extremum relatif.
3. Étudier la dérivabilité de f et construire (C) , les valeurs de b, c et d étant celles qui ont été trouvées en 2.

PROBLÈME

N. B. Les parties B et C étant indépendantes, le candidat pourra (après avoir étudié la partie A) les traiter dans l'ordre qui lui conviendra

Partie A

Soit E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a+b & b \\ b & a-b \end{pmatrix}$$

où a et b sont des nombres réels.

On note respectivement O et I les matrices nulles et unité d'ordre 2; on pose

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que E , muni de l'addition des matrices et de la multiplication par un nombre réel, est un espace vectoriel.

Établir que (I, J) est une base de E et déterminer les composantes d'une matrice de E dans cette base.

2. Calculer J^2 . En déduire que la multiplication des matrices est une loi de composition interne dans E .

Démontrer que E , muni de l'addition et de la multiplication des matrices, a une structure d'anneau.

Cet anneau est-il commutatif? unitaire? Admet-il des diviseurs de zéro?

Quels sont les éléments inversibles de E ?

3. Soit M un élément de E . On pose

$$M^1 = M \quad \text{et} \quad M^n = M \cdot M^{n-1}$$

pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les composantes de M^n dans la base (I, J) sont $(a^n; na^{n-1}b)$.

Déterminer la matrice $M + M^2 + \dots + M^n$ à l'aide de ses composantes dans la base (I, J) .

Partie B

Soit \mathcal{P} le plan vectoriel de base (\vec{i}, \vec{j}) et P le plan affine associé à \mathcal{P} , rapporté au repère cartésien $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f un endomorphisme de \mathcal{P} dont la matrice dans la base (\vec{i}, \vec{j}) est un élément de E .

1. À quelle condition f est-il un automorphisme de \mathcal{P} ? f peut-il être involutif?
2. Déterminer le noyau et l'image de f . À quelles conditions a-t-on l'égalité entre ces deux ensembles?
Dans ce cas, que peut-on dire de $f \circ f$?
3. Trouver les vecteurs de \mathcal{P} invariants par f .
4. Déterminer les droites vectorielles de \mathcal{P} invariantes par f .

5. On désigne par φ l'application affine de \mathbb{P} , associée à f et laissant le point O invariant. Quels sont les points de \mathbb{P} invariants par φ ?
Trouver les droites affines de \mathbb{P} parallèles à leur transformée par φ .
6. On note M_0 le point de coordonnées $(1; -1)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, puis $M_1 = \varphi(M_0)$, ..., $M_n = \varphi(M_{n-1})$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.
Soit $(x_n; y_n)$ les coordonnées de M_n dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer x_n et y_n .
Les suites (x_n) et (y_n) sont-elles convergentes?

Partie C

Soit θ l'application de E dans \mathbb{C} qui, à une matrice M de E de composantes a et b dans la base (I, J) , associe le nombre complexe $Z = a + ib$.

- Démontrer que θ est une application linéaire, bijective, de E sur \mathbb{C} .
- Si $Z = \theta(M)$ et $Z' = \theta(M')$, on pose $Z \star Z' = \theta(M.M')$.
Déterminer $(a + ib) \star (a' + ib')$ où a, b, a', b' sont des réels.
Quelle est la structure de $(\mathbb{C}, +, \star)$?
- Quels sont les nombres complexes admettant un symétrique pour la loi \star ?
- On pose, pour $Z \in \mathbb{C}$, $Z^1 = Z$, ..., $Z^{(n)} = Z \star Z^{(n-1)}$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
Calculer $Z^{(n)}$.
Résoudre l'équation $Z^{(n)} = 1$.
Résoudre l'équation $Z^{(2)} - 5Z + \frac{25}{4} = 0$.