

∞ Baccalauréat C Nantes juin 1977 ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

Soit f l'application, de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , définie par :

$$\begin{cases} x \leq 0 & : f(x) = e^{-x} + 1 \\ x > 0 & : f(x) = 2 + x \operatorname{Log} x \end{cases}$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2. Étudier le sens de variation de f . Tracer sa courbe représentative (\mathcal{C}) dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ l'axe $x'Ox$ des abscisses est dirigé par \vec{i} ; on précisera les branches infinies et les demi-tangentes à (\mathcal{C}) au point de (\mathcal{C}) d'abscisse nulle.
3. m étant un réel strictement positif et inférieur à 1, calculer l'aire $\mathcal{A}(m)$ de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient :

$$m \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad f(x) \leq y \leq 2.$$

Étudier $\lim_{m \rightarrow 0} \mathcal{A}(m)$.

EXERCICE 2

4 POINTS

x est un entier naturel vérifiant : $2 \leq x \leq 8$ et n est un entier relatif quelconque.

Un sac contient 10 boules dont x sont numérotées n et dont les $(10 - x)$ restantes sont numérotées 1.

On tire simultanément deux boules du sac : les tirages ainsi faits sont supposés équiprobables.

1. Définir un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(n), p)$ permettant de décrire l'épreuve.
2. On envisage la variable aléatoire réelle X qui, à tout événement élémentaire, associe la somme des nombres inscrits sur les boules tirées. Préciser l'image de n par X , et définir la loi de probabilité de X .
3. Calculer, en fonction de x et n , l'espérance mathématique $E(X)$ de X .
4. Dans cette question on choisit n égal à (-4) : calculer la variance de X .

PROBLÈME

12 POINTS

Soit E un espace affine euclidien orienté de dimension 3; on désigne par V l'espace vectoriel (sur \mathbb{R}) associé à E .

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ désigne un repère orthonormé direct de E .

F étant une partie non vide de E ou de V , on notera I_F l'identité sur F ; en particulier l'identité I_V sera simplifiée en I .

Étant donné un sous-espace vectoriel U de V , on notera $\mathcal{L}(U)$ l'ensemble des endomorphismes de U , c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires de V dans V .

\mathcal{D} est la droite vectorielle de V engendrée par \vec{k} et \mathcal{P} est le plan vectoriel orthogonal à \mathcal{D} . \mathcal{D} est orientée par \vec{k} ; \mathcal{P} se trouve donc ainsi orienté.

Partie A

On note ϕ l'ensemble des isométries vectorielles φ de V qui vérifient les conditions :

$$\begin{cases} \varphi(\vec{k}) &= \vec{k} \\ \varphi \circ \varphi \circ \varphi &= I \end{cases}$$

1. Démontrer que tout élément de ϕ est une rotation vectorielle.

On désigne par J la rotation vectorielle dont l'axe est \mathcal{D} et dont l'angle mesure $\frac{2\pi}{3}$; démontrer que ϕ est l'ensemble $\{I, J, K\}$ avec $K = J \circ J$.

2. On considère l'endomorphisme somme des trois éléments de ϕ ; caractériser les restrictions de cet endomorphisme respectivement à \mathcal{P} et \mathcal{D} ; décrire cet endomorphisme comme le composé de deux endomorphismes simples de V .
3. Démontrer que I et $L = J + K$ engendrent un plan vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(V)$. α et β étant deux réels, on notera $f_{\alpha, \beta}$ l'endomorphisme $\alpha I + \beta L$ (on rappelle que les endomorphismes αI et βL associent à tout vecteur \vec{v} de V respectivement les vecteurs

$$(\alpha I)(\vec{v}) = \alpha \vec{v} \quad \text{et} \quad (\beta L)(\vec{v}) = \beta \cdot L(\vec{v}).$$

Partie B

On note G l'application affine de E vers E qui laisse O invariant et dont l'endomorphisme associé est $f_{0, -1}$.

1. a. Définir analytiquement G .
 b. Démontrer que l'ensemble des points invariants par G est le plan P contenant O et de direction \mathcal{P} .
 c. M étant un point de E , on désigne par m le projeté orthogonal de M sur P .
 Vérifier la relation : $\overrightarrow{mG(M)} = -2\overrightarrow{mM}$.
2. Déterminer les plans de E invariants par G ; caractériser la restriction de G à un tel plan distinct de P .
3. a étant un réel non nul, on envisage le cercle (C) du plan d'équation $x = 0$, qui passe par O et dont le centre est le point $\Omega(0; a; 0)$.
 Démontrer que l'image (Γ) de (C) par G est une conique dont on précisera la nature et les éléments géométriques (centre, axes, foyers, ...).
 Construire (C) et (Γ) dans le cas particulier : $a = 2$.

Partie C

Soit A un point de E . Étant donnés deux réels α et β , on note $F_{\alpha, \beta}$, l'application affine de E vers E qui laisse A invariant et dont l'endomorphisme associé est $f_{\alpha, \beta}$. On désigne par \mathcal{F} l'ensemble des applications $F_{\alpha, \beta}$ α et β décrivant \mathbb{R} .

Q et D désignent les variétés affines de E contenant A et de directions respectives \mathcal{P} et \mathcal{D} .

1. Démontrer que les restrictions de $f_{\alpha, \beta}$ à \mathcal{P} et à \mathcal{D} sont respectivement :

$$(\alpha - \beta)I_{\mathcal{P}} \quad \text{et} \quad (\alpha + 2\beta)I_{\mathcal{D}}$$

En déduire les restrictions de $F_{\alpha, \beta}$ à Q et à D respectivement.

2. Déterminer les éléments de \mathcal{F} qui sont des isométries.
3. Préciser la nature et les éléments caractéristiques des applications $F_{\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}}$ et $F_{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}}$.
4. α étant un réel non nul distinct de $\frac{1}{3}$, démontrer que $F_{\alpha, \alpha}$ est la composée de deux applications affines simples que l'on précisera.
5. α et β désignent deux réels distincts.
- a. M étant un point de E , on note M' et m ses images respectives par $F_{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}, \frac{\beta}{\alpha-\beta}}$ et par la projection orthogonale sur Q .
Démontrer qu'il existe un réel k , que l'on précisera, tel que, quel que soit M , on ait :

$$\overrightarrow{mM'} = k \overrightarrow{mM}.$$

- b. Démontrer que $F_{\alpha, \beta}$ est la composée de $F_{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}, \frac{\beta}{\alpha-\beta}}$ et d'une homothétie que l'on caractérisera.