

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Nantes ∞

EXERCICE 1

4 points

Une urne contient neuf jetons numérotés de 1 à 9, indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément deux jetons de l'urne et on note leurs numéros :  $a$  et  $b$ . On suppose qu'il y a équiprobabilité de sortie pour chaque jeton. On considère la variable aléatoire  $X$  associant à chaque paire de jetons tirés,  $a$ ,  $b$ , le plus grand commun diviseur de  $a$  et de  $b$ .
  - a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par  $X$ .
  - b. Déterminer la loi de probabilité de  $X$  et sa fonction de répartition. On représentera graphiquement celle-ci dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
  - c. Dédurre de la question précédente les probabilités des **événements** suivants :  
 $A$  : « l'équation  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  et  $ax + by = 1$  admet des solutions »,  
 $B$  : « l'équation  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  et  $ax + by = 2$  admet des solutions »,  
 $C$  : « l'équation  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  et  $ax + by = 12$  admet des solutions ».
2. On effectue maintenant l'épreuve suivante : on tire une paire de jetons, on note  $a$  et  $b$ , on remet les jetons dans l'urne, on effectue un nouveau tirage, et ainsi de suite.
  - a. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois fois 1 pour plus grand commun diviseur de  $a$  et de  $b$  au cours de quatre tirages successifs ?
  - b. Combien faut-il effectuer de tirages pour que la probabilité d'avoir au moins une fois 1 pour plus grand commun diviseur de  $a$  et de  $b$  au cours de  $n$  tirages successifs soit supérieure à 0,999 ?

EXERCICE 2

4 points

Soit  $E_3$  l'espace affine euclidien orienté, rapporté au repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

1.  $f$  désigne l'application affine de  $E_3$  définie analytiquement par

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ z' = z. \end{cases}$$

Démontrer que  $f$  est une rotation affine ; préciser son axe et une mesure de son angle.

2. On considère les quatre points :

$$A(2; 0; 0), \quad B(-1; \sqrt{3}; 0), \quad C(-1; -\sqrt{3}; 0), \quad D(0; 0; 4)$$

On pose  $\mathcal{F} = \{A, B, C, D\}$ .

- a. Vérifier que ABC est un triangle équilatéral de centre de gravité O.
  - b. Vérifier que l'application  $f$  laisse  $\mathcal{F}$  globalement invariant.
3. Soit  $g$  une isométrie affine de  $E_3$  qui laisse  $\mathcal{F}$  globalement invariant.
- a. Déterminer l'isobarycentre G des quatre points A, B, C, D. Calculer

$$\|\overrightarrow{GA}\|, \|\overrightarrow{GB}\|, \|\overrightarrow{GC}\|, \|\overrightarrow{GD}\|.$$

- b. En déduire que  $g$  laisse invariant les points G et D.
  - c. En déduire l'ensemble des déplacements de  $E_3$  qui laissent  $\mathcal{F}$  globalement invariant.
4. Soit  $s$  un antidéplacement de  $E_3$  qui laisse  $\mathcal{F}$  globalement invariant.
- a. Démontrer que  $s$  est associé à une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à un plan vectoriel; en déduire la nature géométrique de  $s$ .
  - b. Quel est l'ensemble des isométries affines de  $E_3$  qui laissent  $\mathcal{F}$  globalement invariant?

**PROBLÈME****12 points**

*Sauf pour les notations, les trois parties du problème sont indépendantes*

P est un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ;  $\mathbb{C}$  est l'ensemble des nombres complexes;  $i$  est le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\frac{\pi}{2}$ . Les affixes des points de P sont toujours données par rapport au repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .  
 $f$  et  $g$  sont les deux applications de  $\mathbb{C}$  vers  $\mathbb{C}$  définies par, pour tout  $z$  de  $\mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned} f(z) &= z^3 + 4(1-i)z^2 - 2(2+7i)z - 16 + 8i \\ g(z) &= z^3 + 2 - 2i. \end{aligned}$$

**Partie A**

1. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes  $z$  vérifiant  $g(z) = 0$ . Représenter les points dont les affixes sont les nombres trouvés et démontrer que ces points forment un triangle équilatéral.
2. Démontrer qu'il existe un, et un seul, réel  $r$ , que l'on déterminera, qui vérifie  $f(r) = 0$ . Déterminer les deux nombres complexes  $a$  et  $b$  de façon à avoir

$$f(z) = (z - r)(z^2 + az + b) \text{ pour tout } z \text{ de } \mathbb{C}.$$

3. Résoudre l'équation  $z \in \mathbb{C}, f(z) = 0$ .  
Démontrer que les points dont les affixes sont les solutions de cette équation forment un triangle rectangle dans le plan P.
4. A, B, C sont les points de P dont les affixes respectives sont  $-1+3i, 1+i, -4$ . Déterminer l'affixe du barycentre G des points A, B, C affectés respectivement des coefficients 4; 3; 5.

5. On désigne par  $h$  l'application de  $P$  vers  $\mathbb{R}$  qui à tout point  $M$  de  $P$  associe le réel

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2 \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + 3 \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}.$$

Calculer  $h(C)$ . Exprimer  $h(M)$  en fonction de  $\|MG\|^2$  et  $h(G)$ .

Déterminer et dessiner l'ensemble des points  $M$  de  $P$  qui vérifient  $h(M) = 18$ .

### Partie B

À tout point  $M$  de  $P$  d'affixe  $z$  on associe le point  $M'$  de  $P$  d'affixe

$$f(z) - g(z).$$

- Déterminer les coordonnées  $(x'; y')$  de  $M'$  dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  en fonction des coordonnées  $(x; y)$  de  $M$  dans le même repère.
- A, B, C sont les points définis en A 4. Donner une équation de l'ensemble  $H_1$  des points  $M$  de  $P$  tels que O, B et  $M'$  soient alignés. Démontrer que  $H_1$  est une hyperbole dont on précisera le centre et les asymptotes.
- Donner une équation de l'ensemble  $H_2$  des points  $M$  de  $P$  tels que O, I et  $M'$  soient alignés, I étant le centre de gravité de A, B, C.  
Démontrer que  $H_2$  est une hyperbole dont on précisera le centre et les asymptotes : on pourra, par exemple, donner une équation de  $H_2$  sous la forme  $y = \varphi(x)$ .
- Démontrer qu'un point  $M$  est commun à  $H_1$  et  $H_2$  si, et seulement si,  $M'$  est confondu avec O.

Résoudre l'équation

$$z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = g(z).$$

En déduire les points communs à  $H_1$  et  $H_2$ .

Construire  $H_1$  et  $H_2$  dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

### Partie C

Un mobile du plan  $P$  a son affixe  $z(t)$  donnée, en fonction du temps  $t$  par

$$z(t) = f(t.i) + 10 - 6i,$$

quand  $t$  décrit l'intervalle  $[0; 2]$  de  $\mathbb{R}$ . On notera  $M(t)$  le point correspondant à l'instant  $t$ .

- Déterminer les coordonnées  $(x(t); y(t))$  de  $M(t)$  dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , ainsi que les coordonnées dans la base  $(\vec{u}, \vec{v})$  des vecteurs vitesse et accélération du mobile à l'instant  $t$ .
- Faire un tableau indiquant les variations de  $x$  et de  $y$  en fonction de  $t$ .

3. Construire les points de la trajectoire du mobile correspondant aux valeurs :  $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{7}{4}, 2$  du réel  $t$  et un vecteur directeur des tangentes à la trajectoire pour les valeurs  $0, \frac{2}{3}, \frac{7}{4}, 2$  de  $t$ .
4. Dédire de ce qui précède le tracé de la trajectoire du mobile, en indiquant le sens du parcours, quand  $t$  décrit  $[0; 2]$ .