

## ❧ Baccalauréat C Nantes juin 1983 ❧

### EXERCICE 1

3 POINTS

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^5 = 1$ ; les solutions seront données sous forme trigonométrique; les représenter dans le plan complexe.
2. Démontrer que la somme des solutions est nulle.
3. En déduire que :

$$\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}.$$

4. Exprimer  $\cos \frac{4\pi}{5}$  en fonction de  $\cos \frac{2\pi}{5}$ , puis calculer  $\cos \frac{2\pi}{5}$  et  $\cos \frac{4\pi}{5}$ .

### EXERCICE 2

5 POINTS

Soit  $P$  un plan affine euclidien;

$ABC$  est un triangle équilatéral;

On note  $MN$  la distance euclidienne des points  $M$  et  $N$  et  $a = AB$ .

1. Déterminer et construire l'ensemble des points  $M$  de  $P$  tels que :

$$2a^2 \leq 2AM^2 + BM^2 + CM^2 \leq 3a^2.$$

2. Pour  $k \in \mathbb{R}$  on considère l'ensemble :

$$\Delta_k = \{M / M \in P, (2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = k\}.$$

- a. Déterminer  $\Delta_k$  et tracer  $\Delta_k$  pour  $k = 3a^2$ .
- b. Considérons  $(\mathcal{E})$  l'ellipse de centre  $G$  barycentre du système  $\{(A, 2), (B, 1), (C, 1)\}$  dont le grand axe est porté par la médiatrice de  $BC$  et est égal à  $a\frac{\sqrt{7}}{2}$  et dont le petit axe vaut  $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ .  
Déterminer les réels  $k$  pour que  $\Delta_k$  soit l'une des directrices de l'ellipse  $(\mathcal{E})$ .

### PROBLÈME (EXTRAIT)

12 POINTS

*Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment*

#### Partie A

On rappelle que l'ensemble  $\mathcal{F}$  des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

On désigne par  $E$  le sous-ensemble de  $\mathcal{F}$  constitué par les fonctions numériques  $f$  deux fois dérivables sur  $\mathbb{R}$  et vérifiant la propriété :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 4f''(x) - 4f'(x) + f(x) = 0$$

$f'$  et  $f''$  désignant les fonctions dérivées première et seconde de  $f$ .

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}$ .
2. Soit  $a$  un nombre réel. Démontrer que la fonction qui à  $x$  associe  $e^{ax}$  appartient à E si et seulement si  $a = \frac{1}{2}$ .
3. Soit  $f$  une fonction numérique deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Démontrer que  $f$  appartient à E si et seulement si la fonction numérique  $g$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = e^{-\frac{x}{2}} f(x)$$

vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = 0.$$

En déduire que E est l'ensemble des fonctions  $f_{a,b}$  définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{a,b}(x) = (ax + b)e^{\frac{x}{2}}$$

$a$  et  $b$  étant deux réels arbitraires.

Démontrer que  $(f_{1,0}; f_{0,1})$  est une base de E. Quelles sont les coordonnées de  $f_{a,b}$  dans cette base ?

4. On pose  $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$   $G = \{f \in E, f'(0) = 0\}$ .

Démontrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Donner une base de chacun d'eux.

5. Soient  $u$  et  $v$  les éléments de E définis par :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x) &= xe^{\frac{x}{2}}; \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad v(x) &= \left(-\frac{x}{2} + 1\right)e^{\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Démontrer que  $(u, v)$  est une base de E et que le système de coordonnées d'un élément  $f$  de E dans cette base est  $(f'(0), f(0))$ .

En déduire que, pour tout couple de réels  $\alpha$  et  $\beta$ , il existe un unique élément  $f$  de E tel que  $f'(0) = \alpha$  et  $f(0) = \beta$ .

6. Étudier les variations des fonctions  $u$  et  $v$  et tracer leurs courbes représentatives dans un même repère orthonormé du plan. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de ces deux courbes.

On désigne par  $\lambda$  un réel strictement négatif; calculer l'aire  $\mathcal{A}(\lambda)$  de la région du plan limitée par les deux courbes tracées et par les droites d'équation  $x = \lambda$  et  $x = \frac{2}{3}$ .

Cette aire admet-elle une limite quand  $\lambda$  tend vers  $-\infty$  ?

### Partie B

On appelle  $\mathcal{S}$  l'espace vectoriel réel constitué par toutes les suites numériques définies sur  $\mathbb{N}$ . La suite de terme général  $u_n, n \in \mathbb{N}$ , sera notée  $(u_n)$ .

Soit  $E'$  le sous-ensemble de  $\mathcal{S}$  constitué par les suites  $(u_n)$  vérifiant la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 4u_{n+2} - 4u_{n+1} + u_n = 0 \quad (1).$$

1. Démontrer que  $E'$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{S}$ .  
Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de premier terme  $u_0$  non nul et de raison  $q$  non nulle; démontrer que  $(u_n)$  appartient à  $E'$  si et seulement si  $q = \frac{1}{2}$ .
2. **a.** Démontrer qu'une suite  $(u_n)$  appartient à  $E'$  si et seulement si la suite de terme général  $\lambda_n = u_n 2^n$  est une suite arithmétique.  
**b.** En déduire que  $E'$  est l'ensemble des suites dont le terme général s'écrit :

$$u_n = (an + b)2^{-n}$$

$a$  et  $b$  étant deux nombres réels arbitraires; déterminer la dimension de  $E'$ .

3. **a.** Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}, 2^n > C_n^2.$$

(On rappelle que  $C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!}$ ).

- b.** En déduire que la suite de terme général  $\frac{n}{2^n}$  converge vers 0.
- c.** Déterminer, si elle existe, la limite de la suite  $(u_n)$  de terme général général  $(an + b)2^{-n}$ ,  $a$  et  $b$  étant deux réels arbitraires.
- d.** On pose :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

En utilisant la propriété (1), établir que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a :

$$S_n = 4(u_1 - u_{n+2}).$$

En déduire la limite de  $S_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .