Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Nantes septembre 1969 ∾

EXERCICE 1

Étudier la fonction définie par

$$y = \frac{1 - \operatorname{Log} x}{x^2}$$

et construire sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

EXERCICE 2

Dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$, on considère le point M_1 dont les coordonnées sont définies en fonction du temps par

$$x = a\cos t \quad \text{et} \quad y = a\sin t,$$

et le. point M_2 dont les coordonnées sont définies par

$$x = a\cos 2t \quad \text{et} \quad y = -a\sin 2t.$$

1. Quelles sont les trajectoires des points M_1 et $M2_2$?
2. Soit M le point défini par $\overrightarrow{\mathrm{O}M} = \dfrac{1}{3}\left(2\overrightarrow{\mathrm{O}M_1} + \overrightarrow{\mathrm{O}M_2}\right)$.
   À quelles dates M, M_1 et M_2 sont-ils confondus ?
3. Démontrer que M appartient au segment M_1M_2 quand ce segment est défini.
   Soit $\overrightarrow{V}$ le vecteur vitesse du point M ; démontrer que $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$ sont orthogonaux à une date quelconque.

PROBLÈME

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$ on considère la parabole (P) ayant pour équation

$$y^2 - 2px = 0 \quad (p > 0).$$

À chaque point M de (P), autre que O, on associe le cercle (C) ayant pour centre le point d'intersection, C, de Ox et de la normale à (P) en M (c'est-à-dire la perpendiculaire en M à la tangente) et ayant pour rayon $r = \mathrm{C}M$.

1. Calculer l'abscisse, λ, du centre, C, du cercle (C) correspondant au point $M\left(x_0~;~y_0\right)$ de (P). Démontrer que ce cercle a pour équation

$$x^2 + y^2 - 2\left(x_0 + p\right)x + x_0^2 = 0.$$

   Écrire l'équation de ce cercle en prenant pour paramètre l'abscisse, λ, de C.

Quel est l'ensemble des points C et quel est l'ensemble des valeurs de r correspondant à l'ensemble des points M de (P) ?

Est-il possible d'envisager M confondu avec O ?

2. Discuter le nombre de cercles (C) passant par un point donné $P(\alpha\ ;\ \beta)$, suivant la position de ce point dans le plan : on aura à faire intervenir la parabole (P) et le cercle (C_0) correspondant à $x_0 = 0$.

3. Soit Q et Q$'$ les extrémités du diamètre de (C) perpendiculaire à Ox : démontrer que les points Q et Q' appartiennent à une parabole (Γ) qui se déduit de (P) par une transformation, que l'on précisera.

Définir avec précision l'ensemble des points Q et Q$'$.

4. Soit R et R$'$ les points de (C) où la tangente a une direction donnée non perpendiculaire à Ox, de pente m.

Démontrer que les points R et R$'$ appartiennent à une parabole (Γ_m), dont on écrira l'équation ; examiner le cas où m est nul.

Définir avec précision l'ensemble des points R et R$'$.