

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Nantes septembre 1971 ∞

EXERCICE 1

Le symbole $\text{Log } u$ désigne le logarithme népérien de u .

On considère la fonction f de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \frac{x}{g(x)} \quad \text{et} \quad g(x) = \text{Log}(\sin x);$$

on impose à x d'appartenir à $[0; 2\pi]$.

1. Déterminer l'ensemble de définition, (D), de f .
2. Calculer la dérivée f' de f et la dérivée h' de h définie par $h(x) = f'(x) \cdot g^2(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout x de (D).

EXERCICE 2

1. p est un paramètre réel; discuter graphiquement le nombre de racines strictement positives de l'équation

$$x^3 + x - p = 0$$

où x est l'inconnue.

2. q est un paramètre réel; discuter graphiquement le nombre de racines strictement positives de l'équation

$$\frac{x^4 + 1}{x^3} - q = 0$$

où x est l'inconnue.

3. m est un paramètre réel; on envisage le système de deux équations à deux inconnues (x et y):

$$\begin{cases} (x + y)\text{Log } x = m\text{Log } y, \\ (x + y)\text{Log } y = 9m\text{Log } x. \end{cases}$$

Vérifier qu'il admet dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la solution $S = (1; 1)$ indépendante de m .

Discuter, suivant les valeurs de m , le nombre des solutions différentes de S que ce système admet dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; on ne demande pas de calculer ces solutions lorsque m est quelconque.

Déterminer, si elles existent, les solutions pour

$$m = \frac{10}{3}, \quad m = \frac{2}{3}, \quad m = -1.$$

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé, O est l'origine, $x'Ox$ et $y'Oy$ sont les axes. Le nombre a est un réel constant strictement positif. Le point A est le point $(0 ; a)$.

M et M' sont deux points quelconques, symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

On considère l'inversion \mathcal{I} , dont le pôle est A et dont la puissance est le réel constant non nul k .

1.
 - a. Démontrer que, lorsque M varie, les cercles (AMM') engendrent un faisceau, que l'on précisera.
Le point M étant fixé, \mathcal{I} transforme M et M' respectivement en P et P' : quel est le transformé du cercle (AMM') ?
En déduire que, lorsque M varie, les droites (PP') passent par un point fixe B , dont on indiquera les coordonnées en fonction de a et de k .
 - b. M étant fixé, quel est le transformé du cercle (APP') ?
Démontrer que ce cercle admet en A une tangente fixe.
Conclure que, lorsque M varie, les cercles (APP') engendrent un faisceau, que l'on précisera.
 - c. Les cercles (AMM') et (APP') peuvent-ils être orthogonaux?
2. Démontrer que P et P' s'échangent dans une inversion \mathcal{I}_1 dont le pôle est fixe et dont la puissance est constante.
3. Soit \mathcal{T} la transformation définie par $\mathcal{T} = \mathcal{I}_1 \circ \mathcal{I}$ (\mathcal{I} suivie de \mathcal{I}_1), on ne demande pas une étude complète; on répondra seulement aux questions suivantes.
 - a. Quel est le transformé de M , que l'on note $\mathcal{T}(M)$?
 $\mathcal{T}(M)$ est-elle une transformation involutive?
 - b. Calculer les coordonnées de $\mathcal{T}(M)$ en fonction de a, k, u et v , où u et v sont les coordonnées de M .
 $\mathcal{T}(M)$ admet-elle des points doubles? Examiner le cas particulier $k = a^2$?
 - c. M étant fixé, quel est le transformé du cercle $(MM'P)$ dans :1 j dans :Il j dans ?
Quelle est la puissance de O pour ce cercle? Démontrer que, lorsque M varie, ces cercles engendrent un faisceau, dont on discutera la nature. Si l'on appelle I et J les points remarquables de ce faisceau (points limites, ou points de base), quels sont (I) et (J) ?