

∞ Baccalauréat C Nantes septembre 1972 ∞

EXERCICE 1

Résoudre, dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, le système suivant :

$$\begin{cases} \bar{3}x + \bar{2}y = \bar{1}, \\ \bar{1}x - \bar{1}y = \bar{2}. \end{cases}$$

EXERCICE 2

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 2x \, dx$.

PROBLÈME

Partie A

On considère l'ensemble (E) des matrices 2×2 , à coefficients réels, de la forme $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$.

1. Démontrer que (E) muni de l'addition des matrices et de la multiplication par un scalaire est un espace vectoriel sur \mathbb{R} . En préciser une base et donner la dimension de cet espace vectoriel.
2. Le sous-ensemble (E') de (E) des matrices de la forme $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$ est-il un sous-espace vectoriel de (E)?
3. Le sous-ensemble (E'') de (E) des matrices de la forme $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$ où les coefficients vérifient la relation $a^2 + b^2 = 1$ est-il un sous-espace vectoriel de (E)?

Partie B

Soit (P) un plan vectoriel euclidien et $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de (P). On considère la transformation f_θ qui, à tout vecteur \vec{u} de (P), associe le vecteur $\vec{u}' = f_\theta(\vec{u})$ de (P); dans la base \mathcal{B} , les composantes $(x; y)$ et $(x'; y')$ respectivement de \vec{u} et de \vec{u}' sont liées par

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta, \\ y' = x \sin \theta - y \cos \theta, \end{cases} \quad \theta \in [0; 2\pi[.$$

1. Démontrer que f_θ est une application linéaire et bijective de (P) dans (P); étudier $f_\theta \circ f_\theta$.
2. Former, relativement à la base \mathcal{B} , la matrice de l'application $f_\theta \circ f_\theta$.
Démontrer que cette application est une rotation vectorielle, dont on précisera l'angle.

3. Au vecteur \vec{u} , de composantes $(x; y)$ dans la base \mathcal{B} , on associe le nombre complexe $z = x + iy$; de même, on pose $z' = x' + iy'$.

Les relations entre x, y, x' et y' données en tête de ce chapitre définissent alors une transformation associée à f_θ , de l'ensemble \mathbb{C} des complexes, soit F_θ .

Démontrer que z' s'exprime, d'une façon simple, en fonction de \bar{z} , complexe conjugué de z .

Démontrer que F_θ est le produit de deux transformations géométriques élémentaires.

Quelle est la nature de f_θ ?

4. Au plan vectoriel (P) et à la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, on associe un plan affine \mathcal{P} et un repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ de \mathcal{P} . Au vecteur \vec{u} , de composantes $(x; y)$ dans \mathcal{B} , on associe le point M de \mathcal{P} ayant pour coordonnées $(x; y)$ dans \mathcal{B} ; de même, au vecteur $\vec{u}' = f_\theta(\vec{u})$ on associe le point $M'(x'; y')$ de \mathcal{P} . On suppose ici que θ est égal à $\frac{\pi}{3}$.

Déterminer la courbe (H') , ensemble des points M' lorsque M décrit la courbe (H) dont l'équation est

$$x^2 - y^2 - 2\sqrt{3}xy - 8 = 0.$$

Définir géométriquement (H) et donner ses éléments remarquables.

Partie C

Dans le plan vectoriel euclidien (P) rapporté à la base \mathcal{B} précédente, on considère la transformation g_φ qui, au vecteur $\vec{u}(x; y)$, associe le vecteur $g_\varphi(\vec{u}) = \vec{v}$ dont les composantes $(X; Y)$ sont définies par

$$\begin{cases} X &= x \cos^2 \varphi + y \sin \varphi \cos \varphi, \\ Y &= x \sin \varphi \cos \varphi + y \sin^2 \varphi, \end{cases} \quad \varphi \in [0; 2\pi[.$$

1. Démontrer que g_φ est une application linéaire de (P) dans (P). Est-elle une bijection?
2. Déterminer le noyau, N, de g_φ ; préciser la dimension de N et en donner une base.
3. Déterminer l'image Im de g_φ ; préciser la dimension de Im et en donner une base.
4. Soit \vec{a} le vecteur $\vec{a} = \vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi$.

Si \vec{u} est un vecteur quelconque de (P), calculer les produits scalaires $\vec{u} \cdot \vec{a}$ et $g_\varphi(\vec{u}) \cdot \vec{a} = \vec{v} \cdot \vec{a}$.

Quelle conclusion peut-on en tirer au sujet de la nature de g_φ ?