Durée : 4 heures

Baccalauréat C Nantes septembre 1975

EXERCICE 1

Soit $Z/15\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers modulo 15 dont on désignera les éléments par $\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{14}$.
Résoudre dans $Z/15\mathbb{Z}$

1. l'équation $\overline{5}x = \overline{0}$;

2. l'équation $\overline{3}x = \overline{0}$;

3. le système

$$\left\{\begin{array}{rcl}\overline{8}x+\overline{2}y &=& \overline{11}\\ \overline{3}x+\overline{2}y &=& \overline{11}\end{array}\right.$$

EXERCICE 2

1. Soit n un nombre entier positif.
Démontrer que $\dfrac{1}{x^n}\text{e}^{-\frac{1}{x}}$ a une limite nulle quand x tend vers zéro avec $x > 0$. (On fera le changement de varia

2. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(0) &=& 0\\ f(x) &=& \dfrac{1}{x^3}\text{e}^{-\frac{1}{|x|}}, \quad \forall x,\ x \in \mathbb{R}*^{\star}\end{array}\right.$$

Cette fonction est-elle continue en tout point de $\mathbb{R}$?
Est-elle dérivable en tout point de $\mathbb{R}$? (Pour la dérivabilité à l'origine, on étudiera $f(x)$ quand x tend vers zéro).
Étudier les variations de f et construire sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$.

3. Soit m un nombre réel, $m > 1$.
Calculer l'aire $\mathscr{A}(m)$ de la partie du plan limitée par la Courbe $(\mathscr{C})$, l' axe des abscisses $x'\text{O}x$ et les droites d'équation $x = \dfrac{1}{m}$ et $x = m$: on calculera d'abord la dérivée de $\text{e}^{-\frac{1}{x}}$ $(x \neq 0)$, puis on fera une intégration par parties. Déterminer la limite de $\mathscr{A}(m)$ quand m tend vers $+\infty$.

PROBLÈME

N. B. : Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

Partie A

On désigne par $\mathscr{P}$ un plan vectoriel euclidien orienté dont $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ est une base orthonormée directe, et on considère l'endomorphisme f de $\mathscr{P}$ défini par sa matrice Mf_f relativement à la base $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$:

$$M_f = \begin{pmatrix} a\sqrt{3} & -a+b \\ a+b & a\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

où a et b sont deux paramètres réels.

1. À quelle condition nécessaire et suffisante l'application f est-elle bijective ?
2. Déterminer, suivant les valeurs de a et b, le noyau Ker f et l'image Im f de cet endomorphisme.
3. Démontrer que l'ensemble des vecteurs de $\mathscr{P}$ invariants par f est une droite vectorielle D si, et seulement si, les paramètres a et b vérifient la relation

$$(1) \qquad 4a^2 - 2a\sqrt{3} + 1 - b^2 = 0.$$

4. Déterminer les couples $(a\ ;\ b)$ vérifiant la relation (1) et tels que f ne soit pas une bijection. Pour chacun de ces couples $(a\ ;\ b)$, préciser le noyau et l'image de f ainsi que la droite vectorielle D des vecteurs invariants par f puis, en déduire la nature de l'endomorphisme f.
5. Dans cette question on suppose $b = 0$ et $a \neq 0$.

   Établir que f est alors le produit d'une rotation vectorielle et d'une homothétie de rapport positif. (On précisera, suivant la valeur de a, le rapport k de l'homothétie et une détermination θ de l'angle de rotation).

Partie B

Soit P le plan affine euclidien orienté dont $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ est un repère orthonormé direct.
On rappelle que l'application de $\mathbb{C}$ dans P qui, à tout nombre complexe z de composantes x et y par rapport à la base (1, i) de $\mathbb{C}$ $\left(\text{i}^2 = -1\right)$, associe le point M de coordonnées x et y par rapport au repère $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ de P, est une bijection ; z est appelé l'affixe de M et M est le point image de z.
On rappelle aussi que, à toute application t de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, on peut associer l'application T de P dans P telle que, si z est l'affixe de m et Z l'affixe de M, on ait

$$T(m) = M \iff t(z) = Z.$$

Enfin on notera $\overline{z}$ le conjugué de nombre complexe z.

1. On désigne par s l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$Z = s(z) = a\left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right) z$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$, a étant un paramètre réel non nul.

Soit S l'application de P dans P associée à s.

a. Étudier, suivant la valeur du paramètre réel a, la nature de S et préciser ses éléments.

b. Déterminer, si elle existe, l'application t^{-1}.

c. Déterminer et construire l'ensemble C des points du plan dont l'affixe z vérifie la relation

$$z\overline{z} + \mathrm{i}\left(z - \overline{z}\right) - 3 = 0.$$

On désigne par C' l'ensemble des images des points de C par l'application S. Écrire la relation qui lie les affixes des points de C' et construire C' pour $a = 2$.

2. On considère l'application φ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$Z = \varphi(z) = \mathrm{i}bz$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$, où b est un paramètre réel non nul.

Soit Φ l'application de P dans P associée à φ.

a. Étudier, suivant les valeurs de b , la nature de Φ.

b. Déterminer et construire l'ensemble Γ des points du plan dont l'affixe z vérifie la relation

$$\left(z + \overline{z}\right)^2 - 4\left(z - \overline{z}\right)^2 = 64.$$

En choisissant $b = 2$, déterminer et construire l'ensemble Γ' des images des points de Γ par l'application Φ.