

## ∞ Baccalauréat C Nantes septembre 1977 ∞

### EXERCICE 1

3 POINTS

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , euclidien, de dimension 3, de base orthonormée  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

1. On envisage l'application linéaire  $f$  de  $E$  dans  $E$  définie par :

$$\begin{cases} f(\vec{i}) &= -\frac{7}{9}\vec{i} + \frac{4}{9}\vec{j} - \frac{4}{9}\vec{k} \\ f(\vec{j}) &= \frac{4}{9}\vec{i} - \frac{1}{9}\vec{j} - \frac{8}{9}\vec{k} \\ f(\vec{k}) &= -\frac{4}{9}\vec{i} - \frac{8}{9}\vec{j} - \frac{1}{9}\vec{k} \end{cases}$$

- a. Démontrer que  $f$  est une isométrie vectorielle.
  - b. Déterminer l'ensemble des vecteurs de  $E$  invariants par  $f$ .
  - c. Déterminer  $f(\vec{j} + \vec{k})$ .
  - d. Caractériser  $f$ .
2. Soit  $g$  la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à la droite vectorielle engendrée par  $\vec{j} + \vec{k}$ .  
Caractériser l'application  $h$ , égale à  $g \circ f$ .
3.  $e$  désignant l'identité dans  $E$ , démontrer que l'ensemble  $\{e, f, g, h\}$ , muni de la loi  $(\circ)$  de composition des applications, est un groupe commutatif.

### EXERCICE 2

4 POINTS

Résoudre dans  $\mathbb{N}$  l'équation d'inconnue  $x$  :

$$3^{3x} - 5 \times 3^{2x} - 3^x + 5 = 0 \pmod{11}.$$

### PROBLÈME

13 POINTS

$P$  est un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  dont les axes  $Ox$  et  $Oy$  sont dirigés respectivement par  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ .

1.  $m$  étant un réel positif non nul, étudier, en discutant par rapport à  $m$  la nature de l'application  $T_m$  de  $P$  vers  $P$  définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' &= y + \text{Log } m; \\ y' &= x + \text{Log } m. \end{cases}$$

$\text{Log } m$  désigne le logarithme népérien de  $m$ .

Existe-t-il des droites invariantes par  $T_m$ , soit point par point, soit globalement?

2. a. Étudier, quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , les limites des fonctions (de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ ) :

$$\begin{aligned} x &\longmapsto -x + \text{Log}(e^x - 1) \text{ et} \\ x &\longmapsto -x + \text{Log}(e^x + 1) \end{aligned}$$

- b. On considère la fonction  $f_1 \begin{cases} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \text{Log}(e^x + 1). \end{cases}$

Étudier les variations de  $f_1$  ; et en tracer la courbe représentative  $(C_1)$  dans le plan P rapporté au repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- c. On considère la fonction  $g_1 \begin{cases} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \text{Log}|e^x - 1|. \end{cases}$

Étudier les variations de  $g_1$  et en tracer la courbe représentative  $(C'_1)$  dans le plan P rapporté au repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- d. Démontrer que  $T_1$  laisse invariant l'ensemble  $(C_1) \cup (C'_1)$ .

3. Soit  $m$  un réel positif non nul. Démontrer que l'image par  $T_m$  de l'ensemble  $(C_1) \cup (C'_1)$  est la réunion des courbes  $(C_m)$  et  $(C'_m)$  représentant respectivement les fonctions  $f_m$  et  $g_m$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  :

$$x \longmapsto \text{Log}(e^x + m) \quad \text{et} \quad x \longmapsto \text{Log}|e^x - m|.$$

Construire  $(C_e) \cup (C'_e)$ .

4. Étudier les variations de la fonction  $h : \begin{cases} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_1(x) - x - e^{-x}. \end{cases}$

En déduire le signe de  $h(x)$ .

Si  $m$  est un réel positif non nul, on envisage l'aire  $\mathcal{A}(m)$  de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient :

$$0 \leq x \leq m \quad \text{et} \quad x \leq y \leq f_1(x).$$

Démontrer que  $\mathcal{A}(m)$  est comprise entre 0 et 1 (on ne demande pas le calcul de cette aire).

*Remarque* :  $\text{Log} 2 \approx 0,7$  ;  $\text{Log}(e - 1) \approx 0,5$  ;

$\text{Log}(e + 1) \approx 1,3$  ;  $\text{Log}(e^2 - 1) \approx 1,9$  ;  $\text{Log}(e^2 + 1) \approx 2,1$ .