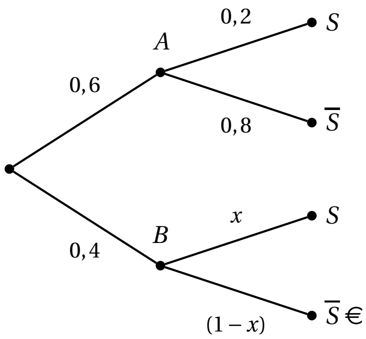
Corrigé du baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie 17 novembre 2014

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

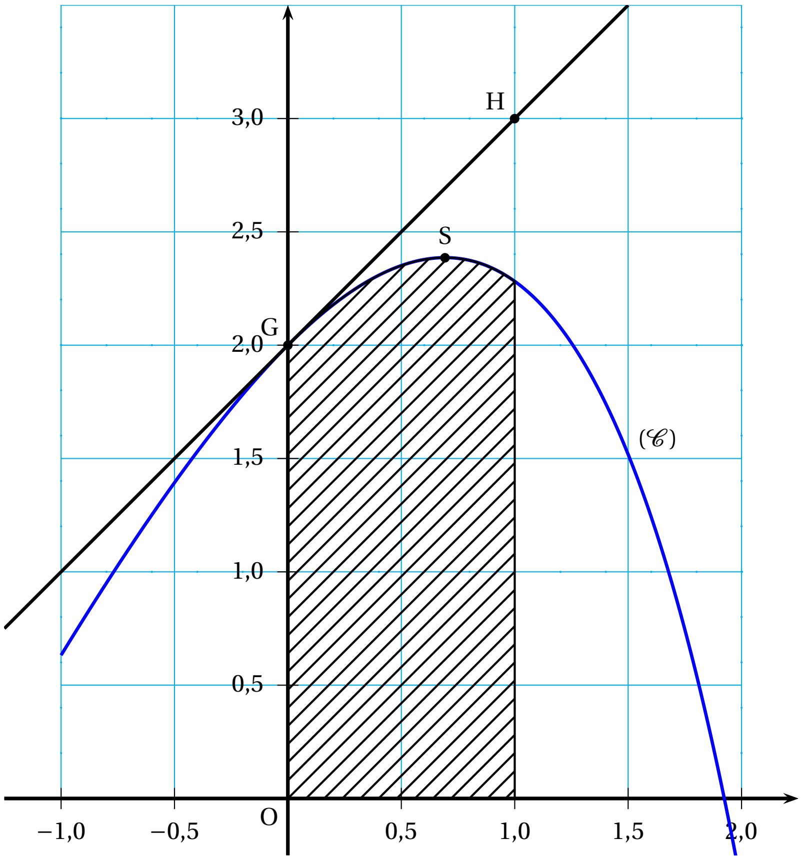
On note A l'événement « le touriste interrogé utilise la compagnie A ».
On note $B = \overline{A}$ l'événement « le touriste interrogé utilise la compagnie B ».
On note S l'événement « le touriste est satisfait du transport utilisé ».
On sait que $p(S) = 0,48$ et $p(A) = 0,6$



1. La probabilité que ce touriste ait choisi la compagnie A et soit satisfait de son transport est : $p(A \cap S) = 0,| \times 0,2 = 0,12$.
   On trouve alors la réponse **b.** .
   Non demandé mais on peut trouver x car $0,48 = 0,12 + 0,4 \times x$ *donc* $x = 0,9$.
2. La probabilité que ce touriste ait choisi la compagnie A sachant qu'il est satisfait de son transport c'est $p_S(A) = \dfrac{p(A \cap S)}{p(S)} = \dfrac{0,12}{0,48} = 0,25$.
   On trouve alors la réponse **c.** .
3. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de F est :
   $\left[p - \sqrt{\frac{p \times p}{N}} ; p + \sqrt{\frac{p \times p}{N}}\right]$.
   Ici $p = 0,48$ et $N = 100$.
   On trouve alors la réponse **a.** $[0,382 ; 0,578]$.
4. $p(X \leqslant 40) \simeq 0,0548$ selon la calculatrice .
   On trouve alors la réponse **a.** 0,055.
5. La probabilité que la traversée entre le continent et l'île dure au moins 35 minutes est :$p(D \geqslant 35) = pD \in [35;50] = \dfrac{15}{20}$.
   On trouve alors la réponse **d.** 0,75.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et L



Partie A

Dans cette partie aucune justification n'est demandée. Par lecture graphique :

1. $f(0) = y_G$ car G est sur $(\mathscr{C})$ et son abscisse vaut 0 , doc $f(0) = 2$.
   $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente au point G c'est $\dfrac{y_H - y_G}{x_H - x_G} = \dfrac{3-2}{1-0} = 1$; $f'(0) = 1$.
2. Sur $[-1~;~2]$ les solutions de $f'(x) \leqslant 0$ sont les x de l'intervalle sur lequel f est décroissante c'est $[\ln(2); 2]$.
3. Il faut quatre carreaux du graphique pour faire une unité d'aire, or il y a entre 8 et 10 carreaux hachurés , donc l'aire hachurée mesure entre 2 et 3 unité d'aire.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $[-1~;~2]$ par

$$f(x) = ax + b - \mathrm{e}^x$$

où a et b sont deux réels.

1. Calculer $f'(x) = a - \mathrm{e}^x$.
2. On sait que $f'(0) = 1$ donc $a - 1 = 1$, donc $a = 2$ et que $f(0) = 2$ donc $b - 1 = 2$, donc $b = 3$

$$f(x) = 2x + 3 - \mathrm{e}^x.$$

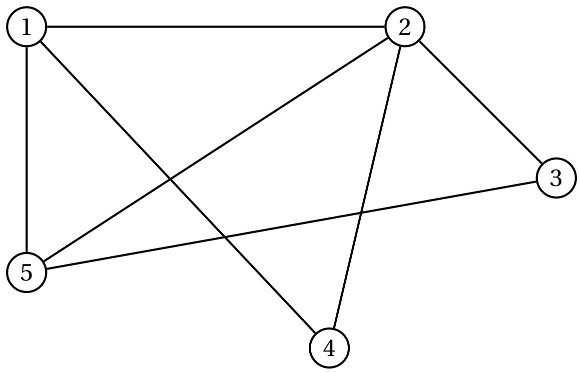
3. Sur $[-1 ; 2]$, une primitive F de la fonction f est la fonction ;

$$F(x) = x^2 + 3x - \mathrm{e}^x.$$

4. La valeur exacte, en unités d'aire, de l'aire du domaine hachuré sur le graphique est donné par $F(1) - F(0) = 5 - \mathrm{e}$.
Cette valeur est environ $2,3$, ce qui convient avec A)3)

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité



1.

sommets	①	②	③	④	⑤
degré	3	4	2	2	3

Comme il y a exactement deux sommets de degré impair ① et ⑤, il y a une chaine eulérienne qui commence et finit par chacun de ces deux sommets, et comme la somme des degrés est 14, il y a 7 arêtes.
$1, 2, 4, 1, 5, 3, 2, 5$ est un tel itinéraire complet d'accrobranches, empruntant une fois et une seule chaque parcours et commençant par l'arbre numéro 1.

2. **a.** La matrice M :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.

b. On utilise la matrice M^3, et son coefficient situé en première ligne quatrième colonne.
C'est 5 ; c'est le nombre d'« itinéraires express » qui débutent à l'arbre numéro 1, empruntent trois parcours d'accrobranches et finissent à l'arbre 4. Ce sont
1,5 , 2 , 4 ;
1,2 , 1 , 4 ;
1,5 , 1 , 4 ;
1,4 , 1 , 4 ;
1,4 , 2 , 4 .

3. **a.** On sait que $K(20 ; 0)$ est sur la courbe $\mathscr{C}$ donc $f(x_K) = y_K$ donc $f(20) = 0$ or $f(20) = a \times 20^2 + b \times 20 + c$ donc $400a + 20b + c = 0$, c'est la première

ligne du système .
On sait que $J(10 ; 2,5)$ est sur la courbe $\mathscr{C}$ donc $f(x_J) = y_J$ donc $f(10) = 2,5$ or $f(10) = a \times 10^2 + b \times 10 + c$ donc $100a + 10b + c = 0$, c'est la deuxième ligne du système .
On sait que $I(2 ; 8,1)$ est sur la courbe $\mathscr{C}$ donc $f(x_I) = y_I$ donc $f(2) = 8,1$ or $f(2) = a \times 2^2 + b \times 2 + c$ donc $4a + 2b + c = 0$, c'est la troisième ligne du système .

b. Prenons $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2,5 \\ 8,1 \end{pmatrix}$ alors le système précédent est équivalent à

$$UX = Y \quad \text{où} \quad U = \begin{pmatrix} 400 & 20 & 1 \\ 100 & 10 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

c. La calculatrice nous permet de savoir que U^{-1} existe .
On sait qu'alors : $UX = Y \iff X = U^{-1}Y$.
On trouve à la calculatrice que

$$U^{-1}Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{40} \\ \frac{-1}{10} \end{pmatrix}$$

Ainsi, $a = \dfrac{1}{40}$, $b = -1$ et $c = 10$.

EXERCICE 3 — 5 points

1. Si on désigne par a_n le nombre d'abonnements l'année $2010 + n$, l'année d'après , en $2010 + (n + 1)$, de ces abonnements il en reste 60% donc $0,6 \times a_n$, et on y rajoute 400 pour avoir le nombre d'abonnements l'année $2010 + (n+1)$ donc

$$a_{n+1} = 0,6a_n + 400.$$

De plus a_0 qui désigne le nombre d'abonnements l'année 2010 vaut 1 500.

2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = a_n - 1000$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = a_{n+1} - 1000$
$v_{n+1} = (0,6a_n + 400) - 1000$
$v_{n+1} = (0,6a_n - 600$ or $600 = 0,6 \times 1000$
$v_{n+1} = (0,6(a_n - 1000$
$v_{n+1} = (0,6v_n)$.
La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,6$ et de premier terme : $v_0 = a_0 - 1000$
$v_0 = 1500 - 1000$
$v_0 = 500$.

b. On sait que pour une suite géométrique, pour tout $n\imath\mathbb{N}$ $v_n = v_0 \times q^n$ donc $v_n = 500 \times 0,6^n$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = v_n + 1000$, donc $a_n = 500 \times 0,6^n + 1000$.

3. a. On multiplie le nombre d'abonnements par le prix d'un abonnement :
$1500 \times 400 = 600000$.

b. Quand une quantité augmente de 5%, par a chaque quantité est obtenue en multipliant la précédente par le coefficient multiplicateur $(1 + \frac{5}{100}) = 1,05$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+1} = 1,05 \times P_n$$

La nature de la suite (P_n) est donc géométrique de raison 1,05, de premier terme $P_0 = 400$.

Et comme au 2)b), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = 400 \times 1,05^n$.

c. Pour l'année $2010 + n$, la recette totale annuelle s'obtient en multipliant le nombre d'abonnements par le prix d'un abonnement $R_n = a_n \times P_n$

$$R_n = \left(500 \times 0,6^n + 1\,000\right) \times \left(400 \times 1,05^n\right).$$

d. A l'aide de la calculatrice on voit que les valeurs de la suite (P_n) commencent par diminuer puis elles augmentent à partir de $n = 3$;

$R_8 = 595\,945$; $R_9 = 623\,658$, donc c'est pour $n = 9$ donc en 2 019 que pour la première fois, la recette de cette société dépassera celle obtenue en 2010 qui était de 600 000.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur [1 ; 10] par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

1. **a.** Rappel : ln est définie dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.

$f'(x) = \dfrac{\ln'(x) \times x - \ln(x) \times 1}{x^2}$

Or $ln'(x) = \dfrac{1}{x}$, donc $\ln'(x) \times x = \dfrac{1}{x} \times x = 1$ donc

$f'(x) = \dfrac{1 - \ln(x) \times 1}{x^2}$sur [1 ; 10].

b. $f'(x)$ est du signe de $(1 - \ln(x))$ sur [1 ; 10] car son dénominateur est x^2 et $x^2 > 0$.

Or pour tout x de $]0 : +\infty[$,

$1 - \ln(x) > 0 \iff 1 > \ln(x)$ or $1 = \ln(\mathrm{e})$ et ln est croissante sur $]0\ ; +\infty[$,

$1 > \ln(x) \iff \ln(\mathrm{e}) > \ln(x) \iff \mathrm{e} > x$.

L'intervalle[1 ; 10] contient e donc f' change de signe en e et

$$f'(x) > 0 \iff 1 > \ln(x) \iff \mathrm{e} > x$$

et $f(\mathrm{e}) = \dfrac{\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

x	1		e		10
$f'(x)$		+	0	−	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	$\frac{\ln(10)}{10}$

2. **a.** Si $u(x) = 1 - \ln(x)$ alors $u'(x) = -\dfrac{1}{x}$

si $v(x) = x^2$ alors $v'(x) = 2x$

$u'(x) \times v(x) - u(x)v'(x) = -\dfrac{1}{x} \times x^2 - (1 - \ln(x)) \times 2x$

$u'(x) \times v(x) - u(x)v'(x) = -x - 2x + \ln(x) \times 2x$

$u'(x) \times v(x) - u(x)v'(x) = -3x + \ln(x) \times 2x$
$u'(x) \times v(x) - u(x)v'(x) = x \times (-3 + 2\ln(x))$
$f''(x) = \dfrac{x \times (2\ln(x) - 3)}{(x^2)^2}$, or $(x^2)^2 = x^4$ qui se simplifie avec x
$f''(x) = \dfrac{(2\ln(x) - 3)}{x^3}$ sur $[1 ; 10]$.

b. $f''(x)$ est du signe de $(2\ln(x) - 3)$ sur $[1 ; 10]$ car son dénominateur est x^3 et $x^3 > 0$.
Or pour tout x de $]0 ; +\infty[$,
$2\ln(x) - 3 > 0 \iff 2\ln(x) > 3 \iff \ln(x) > 1,5 \iff x > \mathrm{e}^{1,5}$.
L'intervalle$[1 ; 10]$ contient $\mathrm{e}^{1,5}$ donc f'' change de signe en $\mathrm{e}^{1,5}$ et

$$f''(x) > 0 \iff 1,5 < \ln(x) \iff \mathrm{e}^{1,5} < x.$$

x	1		$\mathrm{e}^{1,5}$		10
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

c. La courbe $\mathscr{C}$ possède un point d'inflexion au point d'abscisse $e^{1,5}$ car en cette valeur de x, f'' s'annule en changeant de signe .

3. On considère l'algorithme suivant :

INITIALISAIT	
	X PREND LA VALEUR 2
	Y PREND LA VALEUR $\frac{\ln(2)}{2}$
	Z PREND LA VALEUR $\frac{\ln(2,1)}{2,1}$
TRAITEMENT	
	TANT QUE $(Y < Z)$ FAIRE
	X PREND LA VALEUR $X + 0,1$
	Y PREND LA VALEUR $\frac{\ln(X)}{X}$
	Z PREND LA VALEUR $\frac{\ln(X+0,1)}{X+0,1}$
	FIN TANT QUE
SORTIE	
	AFFICHER X

a.

X	Y	Z	Test : $Y < Z$
2	0,346 6	0,353 3	vrai
2,1	0,353 3	0,358 4	vrai
2,2	0,358 4	0,362 1	vrai
2,3	0,362 1	0,364 8	vrai
2,4	0,364 8	0,366 5	vrai
2,5	0,366 5	0,367 5	vrai
2,6	0,367 5	0,367 9	vrai
2,7	0,367 9	0,367 7	faux

b. La valeur affichée en sortie est la dernière valeur de X du tableau c'est $2,7$.
c'est sur l'intervalle $[2,7 ; 2,8]$ que la fonction f atteint son maximum :
après avoir été croissante , elle décroît car $\mathrm{e} \in [2,7 ; 2,8]$.