

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Nice juin 1969 ∞

EXERCICE 1

Étant donné, dans un plan, quatre points, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ et ω_4 , soit Q l'ensemble des suites de quatre points, A, B, C et D, telles que $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ et ω_4 soient respectivement les milieux des segments AB, BC, CD et DA.

Quel est l'ensemble des points A pour lesquels il existe des points B, C et D tels que

$$(A, B, C \text{ et } D) \in Q?$$

EXERCICE 2

Dans l'ensemble des polynômes à coefficients réels d'une variable x , on considère les cinq polynômes A_0, A_1, \dots, A_4 définis par

$$\begin{aligned} A_0(x) &= 1, & A_1(x) &= x - 1, \\ A_2(x) &= (x - 1)(x - 2), \\ A_3(x) &= (x - 1)(x - 2)(x - 3), \\ A_4(x) &= (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4). \end{aligned}$$

1. Montrer que tout polynôme P qui possède un degré inférieur ou égal à 4 admet une expression, et une seule, de la forme

$$P = a_0.A_0 + a_1.A_1 + a_2.A_2 + a_3.A_3 + a_4.A_4,$$

dans laquelle les coefficients a_i sont des constantes réelles (pour $i = 0, 1, 2, 3, 4$).

2. On choisit en particulier le polynôme P défini par

$$P(x) = x^4.$$

Calculer les cinq coefficients a_i qui correspondent à ce polynôme.

N. B. - On conseille de les calculer l'un après l'autre dans l'ordre des indices croissants, en utilisant successivement les valeurs numériques $x = 1, 2, 3, 4, 5$.

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère $x'Ox, y'Oy$.

Dans l'ensemble, E, des points du plan, on définit la loi de composition interne \star qui, au couple M, M' , fait correspondre le point $P : M \star M' = P$.

Les coordonnées de M et M' étant respectivement $(x; y)$ et $(x'; y')$, celles de P sont $(xx'; xy' + y)$ et l'on pose

$$(x, y) \star (x'; y') = (xx'; xy' + y).$$

Partie A

1. Montrer que la loi \star est associative et que $A = (+1 ; 0)$ est élément neutre.
 Tout point du plan admet-il un symétrique pour la loi \star ?
 Prouver que l'ensemble, E' , des points $(x ; y)$ de E tels que $x \neq 0$ est un groupe pour cette loi.
2. On se donne dans E' le point $M_0(x_0 ; y_0)$. Trouver les points $M(x ; y)$ qui commutent avec M_0 .
 Montrer que les points A , M_0 et M sont alignés.
 Quels sont les points M tels que M soit son propre symétrique pour la loi \star ?

Partie B

1. À chaque point M de E' on associe le point M' défini par $M \star M' = A$.
 Montrer, sans nouveaux calculs, que cette transformation est involutive et que M et M' sont alignés avec A .
2. Écrire les formules de cette transformation.
 Démontrer que les projections de M et M' sur l'axe $x'Ox$, faites parallèlement à Oy , forment une division harmonique avec deux points fixes, que l'on précisera.
 Le point M étant donné, indiquer une construction géométrique du point M' à partir de A .

Partie C

Soit $B(x_0 ; y_0)$ un point donné dans E' (on étudiera, dans ce qui suit, le cas où AB n'est pas parallèle à Oy , $x_0 \neq 1$).

1. La relation $M_1 = M \star B$ définit une transformation ponctuelle de E dans E , soit g_B on notera

$$M_1 = g_B(M).$$

- a. Trouver les points invariants de g_B . Quelle est l'image du point A par g_B ?
 Comparer les vecteurs $\overrightarrow{MM_1}$ et \overrightarrow{AB} .
 La droite MM_1 coupe Oy au point α . Évaluer le rapport du vecteur $\overrightarrow{\alpha M_1}$ au vecteur $\overrightarrow{\alpha M}$.
 Caractériser géométriquement g_B à l'aide de la droite $y'Oy$ et des points A et B .
 - b. C étant un autre point de E' , tel que AC ne soit pas parallèle à Oy , démontrer que $g_C \circ g_B = g_{B \star C}$. (on rappelle que $g_C \circ g_B$ est l'application composée, ou bien le produit, de g_B et g_C prises dans cet ordre).
 Dans quel cas le produit de deux affinités d'axe $y'Oy$ est-il une affinité d'axe $y'Oy$?
2. La relation $M_2 = B \star M$ définit une transformation ponctuelle de E dans E , soit f_B ; on notera

$$M_2 = f_B(M).$$

- a.** Trouver le point invariant de f_B .
Montrer que f_B est une homothétie.
Quelle est l'image de A par f_B ?
Caractériser géométriquement les éléments de l'homothétie à partir des points A, B et de l'axe $y'Oy$.
- b.** Démontrer la relation $f_B \circ f_C = f_{B \circ C}$.
Dans quel cas le produit de deux homothéties de centres situés sur $y'Oy$ est-il une homothétie de centre situé sur $y'Oy$?
- c.** Soit F l'ensemble des transformations f_B , où B décrit E' .
Montrer que l'application de E' dans F qui à B associe f_B est une bijection et que les ensembles E' et F , munis respectivement des lois \star et \circ , sont isomorphes.