

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Nice juin 1970 ∞

EXERCICE 1

On considère la fonction f qui, à tout réel x de l'intervalle $I = [0; 1]$, associe le nombre

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

1. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque, φ , définie sur l'intervalle $[0; 1]$. Construire, dans un même repère orthonormé, Oxy , les graphes des fonctions f et φ .
2. Calculer l'aire du domaine limité par le graphe de la fonction f , l'axe $x'x$ et la droite d'équation $x = 1$, ainsi que l'aire du domaine limité par les graphes des fonctions f et φ .

EXERCICE 2

On considère l'équation en Z à coefficients complexes

$$Z^3 - (3 + 4i)Z^2 - 4(1 - 3i)Z + 12 = 0.$$

1. Montrer qu'elle admet une racine réelle, a , dont on calculera la valeur numérique.
2. Montrer que $(Z - a)$ peut être mis en facteur dans le premier membre de l'équation et résoudre l'équation dans \mathbb{C} .

EXERCICE 3

A

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A, de coordonnées $(+1; 0; 0)$, et B, de coordonnées $(0; +1; 0)$.

À tout point M de coordonnées $(X; Y; Z)$ on associe, s'il existe, le point m tel que

$$X\vec{mA} + Y\vec{mB} + Z\vec{mO} = \vec{0}.$$

1. Trouver l'ensemble des points M qui n'ont pas d'associé.
Dans le cas où M a un associé, m , on note $m = g(M)$. Déterminer alors les coordonnées $(x; y; z)$ de m en fonction de celles de M et trouver l'ensemble des points M qui ont une image donnée, m .
2. On restreint la transformation g à l'ensemble des points M du plan (P) d'équation $X + Y + Z = 1$.
On note g_1 cette nouvelle application. Quelle est la nature de g_1 ?

3. Quelle est la nature de la transformée (γ) par g_1 de l'intersection, (Γ) , du plan (P) et de la sphère de centre O et de rayon 1 ?

La courbe (γ) admet un centre de symétrie, dont on déterminera les coordonnées.

Partie B

On considère la transformation ponctuelle T qui, à tout point M de l'espace, de coordonnées $(X; Y; Z)$, associe le point M' , de coordonnées $(X'; Y'; Z')$, tel que

$$X' = Z, \quad Y' = X \quad \text{et} \quad Z' = Y.$$

1. Montrer que la transformation T est une bijection de l'espace sur lui-même, admettant une droite de points doubles, (Δ) .
2. Montrer que, pour tout point M la droite MM' est orthogonale à (Δ) et que tout plan perpendiculaire à (Δ) est globalement invariant par T .
3. On se propose de déterminer la nature de T . À cet effet, on prend pour nouveau repère $(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ défini par

$$\begin{cases} \vec{i}_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}, \\ \vec{j}_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}, \\ \vec{k}_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}). \end{cases}$$

Vérifier que ce nouveau repère est orthonormé. On admettra qu'il est de sens direct.

Dans ce nouveau repère, on note $(x_1; y_1; z_1)$ les coordonnées de M et

$(x'_1; y'_1; z'_1)$ celles de M' .

Calculer x'_1, y'_1, z'_1 en fonction de x_1, y_1 et z_1 . En déduire que T est une rotation dont l'axe, passant par O , admet \vec{k}_1 pour vecteur directeur et dont on précisera l'angle.

Partie C

À tout point M du plan (P) on associe le point $m = g_1(M)$ et le point $M' = T(M)$. On note $m' = g_1(M')$.

1. Montrer que, si $(x; y; z)$ sont les coordonnées de m et $(x'; y'; z')$ celles de m' , on a

$$(1) \quad \begin{cases} x' &= -x - y + 1, \\ y' &= x, \\ z' &= z = 0. \end{cases}$$

Ces relations (1) définissent une transformation, S , du plan d'équation $z = 0$ dans lui-même.

Montrer que S est bijective et admet un point double, ω .

2. Montrer sans calcul que la courbe (γ) , définie dans la question A, 3., est globalement invariante par S .

3. Soit (D) et (D') les droites passant par ω et de pentes respectives -1 et -2 .

Montrer que S s'obtient en composant, dans l'ordre, la symétrie par rapport à (D) avec l'affinité de direction (D') , de rapport -1 et dont l'axe est la parallèle à l'axe Ox passant par ω .

N. B. - La question C ne fait intervenir de la question B que la définition de la transformation T .