

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Nice juin 1972 ∞

**EXERCICE 1**

Soit la fonction  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par

$$x \mapsto f(x) = x \operatorname{Log} x$$

( $\operatorname{Log} x$  désigne le logarithme népérien de  $x$ ).

1. Étudier cette fonction et construire sa courbe représentative (G) dans un repère orthonormé d'axes  $x'Ox$ ,  $y'Oy$ .
2. Déterminer les primitives de  $f$  en faisant une intégration par parties et calculer l'aire du domaine plan fini limité par (G), l'axe  $x'Ox$  et les droites d'équations respectives  $x = \sqrt{e}$  et  $x = e^2$ ?

On donnera une valeur approchée de cette aire, avec la précision permise par les tables de logarithmes.

**EXERCICE 2**

Soit E l'ensemble des matrices carrées,  $M$ , à deux lignes et deux colonnes, de la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix} \quad (p \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}, |p| \neq |q|).$$

1. Montrer que E est un sous-groupe commutatif du groupe multiplicatif des matrices inversibles. On rappelle qu'une matrice est inversible si son déterminant est différent de 0.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout  $n$  entier positif, la puissance  $n$ -ième de  $M$  s'écrit

$$M^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (p+q)^n + (p-q)^n & (p+q)^n - (p-q)^n \\ (p+q)^n - (p-q)^n & (p+q)^n + (p-q)^n \end{pmatrix}$$

**PROBLÈME**

Pour tout réel  $u$ , soit  $T_u$  l'application du plan, rapporté à un repère orthonormé d'axes  $x'Ox$ ,  $y'Oy$ , dans lui-même, qui, au point  $m(x; y)$ , associe le point  $M(X; Y)$  tel que

$$\begin{cases} X = x + 2u, \\ Y = ux + y + u^2. \end{cases}$$

1. a. Montrer que  $T_u$  est bijective et déterminer l'application réciproque,  $T_u^{-1}$ .

- b.** Montrer que l'ensemble,  $E$ , des applications  $T_u$ , muni de la loi de composition des applications, a une structure de groupe commutatif isomorphe au groupe additif des nombres réels.
- c.** Montrer que la parabole (P) d'équation  $y = \frac{x^2}{4}$  est globalement invariante par  $T_u$
- 2.** On définit, à partir de l'origine  $O$ , de proche en proche, le point  $M_n$  de la manière suivante :

$$M_1 = T_{\frac{1}{2}}(O), M_2 = T_{\frac{1}{2^2}}(M_1), M_3 = T_{\frac{1}{2^3}}(M_2), \dots, M_n = T_{\frac{1}{2^n}}(M_{n-1}).$$

- a.** Calculer, en fonction de  $n$ , les coordonnées  $x_n$  et  $y_n$  de  $M_n$ . Quelle est la position limite de  $M_n$  quand l'entier  $n$  augmente indéfiniment?
- b.** Exprimer, en fonction de  $n$ , les coordonnées  $X_n$  et  $Y_n$  du barycentre,  $G_n$ , des points  $M_1, M_2, \dots, M_n$  affectés de coefficients égaux à 1 et en déduire la position limite de  $G_n$  quand  $n$  augmente indéfiniment.
- c.** Calculer les coordonnées  $X'_n$  et  $Y'_n$  du point  $I_n$ , intersection des tangentes à la parabole (P) aux points  $M_n$  et  $M_{n+1}$  et montrer que, pour tout  $n$ ,  $I_n$  appartient à une parabole (P'), dont on donnera l'équation.
- 3.** L'image par  $T_u$  du point  $O$ , c'est-à-dire le point  $M$  de coordonnées  $x = 2u$  et  $y = u^2$ , est animée, par rapport au repère orthonormé d'axes  $x'Ox, y'Oy$ , d'un mouvement défini, en fonction du temps  $t$ , par

$$u = \operatorname{tg} t \quad \text{et} \quad t \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

- a.** Déterminer la norme du vecteur vitesse  $\overrightarrow{v}(t)$  du point  $M$  à l'instant  $t$  et indiquer, sur la trajectoire, les arcs qui correspondent à un mouvement accéléré ou retardé.
- b.** Montrer que, pour  $t$  appartenant à l'intervalle  $\left] -\frac{\pi}{2}; 0 \right[$ , les vecteurs vitesse aux instants  $t$  et  $t + \frac{\pi}{2}$  sont orthogonaux.
- c.** On considère le point  $N$  défini, à chaque instant  $t$ , par  $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{v}(t)$ .  
Montrer que l'équation cartésienne de l'ensemble ( $\mathcal{H}$ ) des points  $N$  peut s'écrire sous la forme  $2y^2 = x^3 - 2x^2, x \neq 0$ . Construire ( $\mathcal{H}$ ).