Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Nice juin 1976 ∾

EXERCICE 1

1. On considère l'entier naturel n qui s'écrit $\overline{5\,3\,x\,4}$ dans le système de numération de base huit. Déterminer x de telle sorte que :
   a. n soit divisible par 7 ;
   b. n soit divisible par 6.

   En déduire qu'il existe x tel que n soit divisible à la fois par 6 et par 7.
2. On prend $x = 2$. Déterminer l'écriture décimale de n.
   Quel est le nombre de diviseurs de n dans $\mathbb{N}$?
   Trouver le plus petit nombre entier naturel non nul par lequel il faut multiplier n pour que le produit soit un carré.

EXERCICE 2

On considère l'équation

$$z \in \mathbb{C}, \quad z^2 + (-6 + \text{i})z + 7 + 3\text{i} = 0$$

1. Résoudre l'équation.
2. On appelle z_1 la solution dont une détermination de l'argument est $\dfrac{\pi}{4}$ et z_2 l'autre solution.
   Soit P un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé. Soit $\tilde{s}$ la similitude directe de P qui, au point d'affixe -2, associe le point d'affixe 1 et, au point d'affixe z_1, associe le point d'affixe z_2. Déterminer le centre, l'angle et le rapport de $\tilde{s}$.

PROBLÈME

Partie A

Soit E un espace vectoriel sur R de dimension deux. On donne un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ de E, et une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ (forme linéaire) φ telle que $\varphi\left(\overrightarrow{u}\right) \neq 0$.

1. Démontrer que le noyau de φ est de dimension un.
2. On définit une application f de E dans E par

$$f : \begin{array}{ccc} \text{E} & \rightarrow & \text{E} \\ \overrightarrow{v} & \longmapsto & \overrightarrow{v} + \varphi\left(\overrightarrow{v}\right) \cdot \overrightarrow{u} \end{array}$$

   Démontrer que f est une application linéaire et que l'ensemble des vecteurs de E invariants par f est une droite vectorielle. Soit D la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{u}$. Montrer que $f(D) \subset D$.

3. Démontrer que f admet une application réciproque si, et seulement si, $\varphi\left(\overrightarrow{u}\right) \neq -1$ et que f est involutive si, et seulement si, $\varphi\left(\overrightarrow{u}\right) = -2$.

4. On suppose que E est euclidien et que $\left\|\overrightarrow{u}\right\| = 1$. On considère $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u'}\right)$ base orthonormée de E. On suppose que φ vérifie $\varphi\left(\overrightarrow{u}\right) = -2$ et $\varphi\left(\overrightarrow{u'}\right) = 0$.

Déterminer la matrice de f dans la base $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u'}\right)$. En déduire la nature de f.

5. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine sur l'espace vectoriel E, et A un point de $\mathscr{E}$. On considère l'application

$$F: \begin{array}{ccc} \mathscr{E} & \to & \mathscr{E} \\ M & \longmapsto & M' \end{array}$$

où M' est défini par $\overrightarrow{MM'} = \varphi\left(\overrightarrow{\mathrm{A}M}\right) \cdot \overrightarrow{u}$.

Démontrer que F est une application affine. Quelle est l'application linéaire associée ?

Partie B

On rappelle que l'ensemble des fonctions numériques définies sur R, noté $\mathscr{F}(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$, muni des lois habituelles (addition et multiplication par un réel), est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Soit E l'ensemble des fonctions $f_{a,\ b}$ appartenant à $\mathscr{F}(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$, $(a\ ;\ b)$ parcourant $\mathbb{R}^2$, définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{a,\ b}(x) = ax\mathrm{e}^{-x} + \frac{b\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

1. Démontrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2.

2. Soit P un plan affine euclidien et $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ un repère orthonormé de P.

Étudier $f_{0,\ 1}$ et tracer sa courbe représentative C dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.
Démontrer que $f_{0,\ 1}$ admet une fonction réciproque définie sur un intervalle que l'on précisera, continue et strictement croissante sur cet intervalle. Exprimer cette fonction réciproque $f_{0,\ 1}^{-1}$.

3. Démontrer que, pour tout entier n positif :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{1,\ 0}^{(n)}(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{-x}(x - n),$$

$f_{1,\ 0}^{(n)}$ désignant la fonction dérivée n-ième de $f_{1,\ 0}$.

4. Soit $\left| \begin{array}{cccc} \varphi : & E & \to & \mathbb{R} \\ & f_{a,\ b} & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{\mathrm{Log}\,2} f_{a,\ b}(x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right.$

Soit $f_{\alpha,\ \beta}$ une fonction appartenant à E telle que

$$(\alpha,\ \beta) \neq (0,\ 0) \quad \text{et} \quad \varphi\left(f_{\alpha,\ \beta}\right) \neq 0.$$

On considère $\begin{array}{llll} f : & E & \to & E \\ & f_{a,\, b} & \longmapsto & f_{a,\, b} + \varphi\left(f_{a,\, b}\right) \cdot f_{\alpha,\, \beta} \end{array}$

Démontrer que f est involutive si et seulement si :

$$\frac{\alpha}{2}(1 - \text{Log}\, 2) + \beta \text{Log}\, \frac{3}{2} + 2 = 0.$$