

♣ Baccalauréat C Nice juin 1979 ♣

EXERCICE 1

4 POINTS

On considère la fonction numérique d'une variable réelle f définie par

$$f(x) = \log\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$

où \log désigne le logarithme népérien.

1. Étudier les variations de f et construire sa courbe représentative (\mathcal{C}) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (On donne $\log 2 \approx 0,7$).
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\text{Log}(2+x) - \text{Log} 2}{x}$ admet pour limite $\frac{1}{2}$ en 0.
3. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la portion du plan comprise entre la courbe (\mathcal{C}), la droite d'équation $y = \text{Log} 2$, et les droites d'équations respectives $x = -1$ et $x = \lambda$ où λ est un nombre réel strictement inférieur à -1 .
Déterminer la limite éventuelle de $\mathcal{A}(\lambda)$ quand λ tend vers $-\infty$.

EXERCICE 2

3 POINTS

\mathbb{C} désigne le corps des nombres complexes et A le point du plan complexe d'affixe $z = a + ib$ ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$).

On considère l'équation :

$$z^2 + (1 - b)z + a = 0.$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b , pour que l'équation admette une racine double.
Représenter dans le plan complexe l'ensemble (Γ) des points A (d'affixe $a + ib$) correspondants.
2. Préciser suivant la position du point A dans le plan la nature des racines de l'équation.

PROBLÈME

13 POINTS

Partie A

Soit a, b, c trois nombres réels. On note f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + b \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + c.$$

1. a. Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n \left[a \cos\left(\frac{\pi}{2}x + n\frac{\pi}{2}\right) + b \sin\left(\frac{\pi}{2}x + n\frac{\pi}{2}\right) \right]$$

sachant que $f^{(n)}$ désigne la fonction dérivée n -ième de f .

- b.** On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{4^n} f^{(2n)}(0)$.
Calculer u_1 . Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, est une suite géométrique de raison $-\frac{\pi^2}{16}$.
Calculer, si elle existe, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_1 + u_2 + \dots + u_n)$ en fonction de a .
- 2.** On pose $a = 4\alpha$, $b = 7\beta$, $c = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Écrire l'expression de $f(x)$.
Déterminer l'ensemble des couples (α, β) appartenant à \mathbb{Z}^2 tels que $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.
- 3.** On pose $a = 1$, $b = c = 0$ et on note φ la restriction de f à $[0; 2]$. Écrire l'expression de $\varphi(x)$.
- a.** Montrer que φ admet une fonction réciproque ψ .
b. Quel est l'ensemble de définition de ψ ? Préciser son sens de variation et tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormé.
c. Sur quel ensemble ψ est-elle dérivable?
- 4.** On pose $a = c = 0$, $b = 1$. Écrire l'expression de $f(x)$. Calculer $\int_0^1 [f(x)]^2 dx$.
- 5.** On appelle f_1 la fonction f obtenue pour $a = 1$, $b = c = 0$.
On appelle f_2 la fonction f obtenue pour $a = c = 0$, $b = 1$. On considère

$$S_1 = \sum_{k=0}^4 f_1\left(\frac{4k}{9}\right) \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{k=0}^4 f_2\left(\frac{4k}{9}\right).$$

- a.** Exprimer $S_1 + iS_2$ en fonction du nombre complexe z de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{9}$.
b. En déduire S_1 .

Partie B

On note E l'ensemble des fonctions $f_{a,b,c}$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{a,b,c}(x) = a \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + b \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + c$$

avec (a, b, c) appartenant à \mathbb{R}^3 .

- 1.** On rappelle que l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , muni de l'addition et de la multiplication par un réel, est un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Cet ensemble sera noté \mathcal{F} .
- a.** Montrer que E est un sous-espace vectoriel de \mathcal{F} .
b. Déterminer la dimension de E .
- 2.** On note $f \bullet g$ le réel $\frac{1}{4}[2f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(-1)g(-1)]$.

- a. Montrer que l'application : $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$
 $(f, g) \mapsto f \bullet g$ est un produit scalaire sur E .

Dans toute la suite, on considérera E muni de ce produit scalaire; le réel $\sqrt{f \bullet f}$ sera noté $\|f\|$.

- b. Soit les fonctions :

$$\begin{aligned} e_1: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & e_2: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 1 & x &\mapsto \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \\ e_3: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto -2 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1 \end{aligned}$$

Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée de E .

Montrer que :

$$f_{a, b, c} = \left(\frac{a}{2} + c\right) e_1 + \frac{b\sqrt{2}}{2} e_2 - \frac{a}{2} e_3.$$

En déduire que :

$$f_{a, b, c} \bullet f_{a', b', c'} = \left(\frac{a}{2} + c\right) \left(\frac{a'}{2} + c'\right) + \frac{bb'}{2} + \frac{aa'}{4}.$$

3. On suppose que E est orienté et que (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée directe. Soit τ l'endomorphisme de E défini par

$$\begin{cases} \tau(e_1) = f_{0, 0, 1} \\ \tau(e_2) = f_{-1, \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{1}{2}} \\ \tau(e_3) = f_{-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}} \end{cases}$$

Montrer que τ est une isométrie vectorielle dont on déterminera la nature et les éléments caractéristiques.

4. Soit \mathcal{P} un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé (\mathcal{R}) .

Déterminer l'ensemble Γ des points M de coordonnées $(x; y)$ dans (\mathcal{R}) tels que les vecteurs $f_{y, x, 1}$ et $f_{2y, \frac{2}{3}x, -\frac{y}{2}}$ de E soient orthogonaux.

Représenter cet ensemble dans (\mathcal{R}) .