∽ Baccalauréat C Nice juin 1981 ∾

EXERCICE 1

On considère l'anneau A = $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.
Soit $\dot{a}$ un élément de A ($a \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant a \leqslant 8$).

1. Donner tous les couples $(\dot{a},\ \dot{3}\dot{a})$ et $(\dot{a},\ \dot{5}\dot{a})$ pour $\dot{a}$ décrivant A. $\dot{3}$ et $\dot{5}$ sont-ils inversibles ?

2. $\dot{a}$ étant un élément donné de A, résoudre dans A l'équation

$$\dot{5}\dot{x} - \dot{2}\dot{a} = \dot{4}.$$

3. Résoudre dans A^2 le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{5}x - \dot{2}y &=& \dot{4} \\ \dot{6}x + \dot{3}y &=& \dot{3}. \end{array}\right.$$

EXERCICE 2

Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{array}{llcl} \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, & f(x) &=& 2\sqrt{x}, \\ \text{si} \quad x > 1, & f(x) &=& a\left(x^2 - 1\right) + b(x-1) + 2, \end{array}$$

où a et b sont deux réels donnés.

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}_+$?

2. Donner une relation nécessaire et suffisante entre a et b pour que f soit dérivable en $x = 1$. On exprimera alors b en fonction de a.

3. On suppose f dérivable en $x = 1$.

a. Étudier, suivant les valeurs de a, le sens de variation de f.

b. Comment faut-il choisir a pour que f s'annule en un point de l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$?

c. On choisit $a = -1$. Calculer $x_0 \in [1\ ;\ +\infty[$ tel que $f(x_0) = 0$.
Calculer l'aire du domaine D, ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \leqslant & x & \leqslant & x_0 \\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & f(x) \end{array}\right.$$

d. Représenter graphiquement f pour $a = -1$.

PROBLÈME

$\overrightarrow{\text{E}}$ désigne un plan vectoriel euclidien, E un plan affine associé à $\overrightarrow{\text{E}}$ et $\text{R} = \left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ un repère orthonormé de E.

Partie A

k désignant un réel quelconque, on appelle φ_k l'endomorphisme de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ dont la matrice, dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}\,,\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ est

$$\begin{pmatrix}\dfrac{4k+1}{5} & \dfrac{2-2k}{5}\\ \dfrac{2-2k}{5} & 4+k5\end{pmatrix}$$

1. Pour quelles valeurs de k, φ_k est-il bijectif? Nature de φ_1 ?
2. Montrer que φ_0 est une projection vectorielle dont on précisera les éléments caractéristiques.
3. Quelle est la nature de φ_{-1} ? Déterminer ses éléments caractéristiques.
4. Déterminer, pour k différent de 1, les droites globalement invariantes par φ_k.

Partie B

Soit a et b deux réels donnés.
Soit g l'application affine de E dans E d'endomorphisme associé φ_{-1} et transformant O en le point de coordonnées $(a\,;\ b)$ dans le repère R.

1. Soit M un point quelconque de E, de coordonnées $(x\,;\ y)$ dans le repère R. Déterminer les coordonnées $\left(x'\,;\ y'\right)$ de l'image M' de M par g.
2. Quelle condition nécessaire et suffisante doivent vérifier a et b pour que g soit involutive ?
3. Démontrer qu'il existe une unique translation t et une unique symétrie affine s dont l'axe a la direction du vecteur de la translation et telles que

$$g = t\circ s = s\circ t.$$

   Préciser leurs éléments caractéristiques.

Partie C

Soit f_k l'application affine de E dans lui-même d'endomorphisme associé φ_k et transformant O en le point de coordonnées $(2k-2\,;\ 1-k)$.

1. Déterminer les coordonnées $\left(x'\,;\ y'\right)$ de l'image par φ_k d'un point M quelconque de E, de coordonnées $(x\,;\ y)$ dans le repère R.
2. Étudier l'ensemble des points invariants par f_k.
3. Quelle est la nature de f_0 ? Préciser ses éléments caractéristiques.
4. M désignant un point quelconque de E et k un réel non nul, on pose

$$f_0(M) = M_0 \quad \text{et} \quad f_k(M) = M'.$$

   Quelle relation a-t-on entre les vecteurs $\overrightarrow{M_0M}$ et $\overrightarrow{M_0M'}$?
   En déduire une construction géométrique de $M' = f_k(M)$.