Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C juin 1982 Nice ∽

EXERCICE 1 **4 points**

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On suppose $n \geqslant 3$.
On tire une boule, qu'on remet dans l'urne après en avoir noté le numéro. On admet que le tirage de chacune des boules est équiprobable. Puis on tire une seconde boule et on en note le numéro.
On appelle X la variable aléatoire définie de la façon suivante :

— si les numéros sont égaux, X prend leur valeur commune,
— si les numéros sont différents, X prend la valeur du plus grand des deux.

1. Trouver la probabilité des évènements suivants :
   — E_1 : X prend la valeur 1.
   — E_2 : X prend la valeur 2.
   — E_3 : X prend la valeur 3.
   — E_p : X prend la valeur p (p entier tel que $1 \leqslant p \leqslant n$).
2. Calculer l'espérance de X.
   On rappelle que la somme des n premiers entiers non nuls est
   $$\sum_{p=1}^{n} p = \frac{n(n+1)}{2}.$$
   et que la somme des carrés des n premiers nombres entiers non nuls est
   $$\sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

EXERCICE 2 **4 points**

Le plan affine euclidien est rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'axes $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$.
Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation
$$x^2 - 3y^2 + 8x + 12y + 16 = 0.$$

1. Démontrer que $\mathscr{C}$ est une conique dont on précisera les éléments caractéristiques : centre, axes de symétrie, foyers, directrices, asymptotes, excentricité.
   Tracer $\mathscr{C}$.
2. Soit (D) la droite d'équation $y - 3 = 0$.
   On désigne par $d(M,~\text{D})$ la distance du point M à la droite (D). Soit P le point de coordonnées $(-4~;~6)$; $d(M,~\text{P})$ désigne la distance de M à P.
   Quel est l'ensemble des points M tels que $d(M,~\text{P}) = 2d(M,~\text{D})$?

PROBLÈME **12 points**

On désigne par $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels et par $\mathbb{R}_+^{\star}$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

Partie A

On appelle $\mathcal{P}_2$ l'ensemble des fonctions polynômes P définies par

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad P(x) = ax^2 + bx + c,$$

où $(a,\ b,\ c)$ est élément de $\mathbb{R}^3$. On appellera θ la fonction polynôme nulle.
On rappelle que $\mathcal{P}_2$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension trois, dont la base canonique est $(e_0,\ e_1,\ e_2)$ avec

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad e_0(x) = 1,\ e_1(x) = x,\ e_2(x) = x^2.$$

On considère l'application φ de $\mathcal{P}_2$ dans $\mathcal{P}_2$, qui à tout élément P associe $\varphi(P) = Q$, avec Q défini par la relation

$$(1) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}) : \quad [\varphi(P)](x) = Q(x) = x^2 P'' - (\alpha x + \alpha - 1)P'(x) + P(x)$$

où α est un réel donné, P' et P'' étant les fonctions dérivées première et seconde de P.

1. **a.** Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{P}_2$.
   b. Calculer $\varphi(e_0)$, $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$ en fonction de e_0, e_1, e_2.
   P étant défini par
   $$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad P(x) = ax^2 + bx + c,$$
   calculer $<\varphi(P)$ en fonction de $e_0,\ e_1,\ e_2$.
2. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R} - \left\{1\ ;\ \dfrac{3}{2}\right\}$, $\left(\varphi(e_0),\ \varphi(e_1),\ \varphi(e_2)\right)$ est une base de $\mathcal{P}_2$.
   En déduire que φ est un automorphisme de $\mathcal{P}_2$.
   Déterminer la fonction polynôme P telle que $\varphi(P) = \theta$.
3. Dans cette question, on suppose $\alpha = 1$.
   a. Calculer alors $\varphi(e_0)$, $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$.
   b. Montrer que φ est une projection vectorielle dont on précisera les éléments géométriques.
   c. Comment faut-il choisir Q dans $\mathcal{P}_2$ pour qu'il existe des fonctions polynômes P de $\mathcal{P}_2$ vérifiant $\varphi(P) = Q$?
   On donne Q défini par $Q(x) = x^2 - 2$. Trouver les fonctions polynômes P solutions de
   $\varphi(P) = Q$.
4. Dans cette question, on suppose $\alpha = \dfrac{3}{2}$.
   a. Calculer $\varphi(e_0)$, $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$.

b. En déduire $\operatorname{Im}\varphi$.

c. Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$.

Partie B

On se propose dans cette partie d'étudier l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions f de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivables, et vérifiant la relation

$$(2)(\forall x \in \mathbb{R}_+^\star), \quad x^2 f''(x) - xf'(x) + f(x) = 0.$$

1. Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $f(x) = kx$, $k \in \mathbb{R}$, est une solution de (2). Comparer à A 3.
2. On se propose de chercher les éléments f de $\mathcal{F}$, sous la forme $f(x) = xg(x)$ où g est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

   a. Vérifier que (2) équivaut à

   $$xg'(x) = d,$$

   où d est une constante réelle arbitraire.

   b. En déduire la forme générale des fonctions g puis celles des fonctions f.
3. Soit h, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par

   $$h(x) = x\operatorname{Log} x - 2x.$$

   a. Montrer que h est un élément de $\mathcal{F}$.

   b. On définit la fonction $\overline{h}$ par

   $$\left\{\begin{array}{lcl}\overline{h}(x) & = & h(x) \quad \text{si } x \in \mathbb{R}_+^\star\\ \overline{h}(0) & = & 0\end{array}\right.$$

   Étudier la continuité et la dérivabilité de $\overline{h}$ pour $x = 0$.
   Étudier les variations de $\overline{h}$ et donner sa représentation graphique dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé. On prendra $\left\|\overrightarrow{\imath}\right\| = \left\|\overrightarrow{\jmath}\right\| = 1$ cm.
   Préciser la tangente à l'origine.