

♣ Baccalauréat C Nice juin 1984 ♣

EXERCICE 1

4 POINTS

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point m d'affixe $z = x + iy$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

Lorsque z est différent de $-i$, on envisage le nombre complexe :

$$Z = \frac{z^2}{z+i}.$$

1. Déterminer et représenter l'ensemble (Γ) des points m tels que Z soit imaginaire pur.
2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$z^2 + 2iaz - 2a = 0$$

où a est un réel donné.

Montrer que les images des solutions de cette équation appartiennent à (Γ) . Ce résultat était-il prévisible?

EXERCICE 2

4 POINTS

Dans le plan orienté rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne le point A de coordonnées $(0; 1)$ et le cercle (C) de centre A et de rayon 1. Soit B un point de l'axe des abscisses, distinct de O . Soit (C') le cercle de centre B passant par A .

1. On appelle φ la mesure de l'angle (\vec{AO}, \vec{AB}) , appartenant à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}[$.
Exprimer en fonction de φ l'abscisse de B et le rayon du cercle (C) .
2. a. Déterminer les deux homothéties qui transforment (C) en (C') : on déterminera le rapport et les coordonnées du centre de chacune de ces homothéties.
b. Montrer que l'ensemble des centres de ces homothéties, lorsque B parcourt l'axe des abscisses (en restant distinct de O), est inclus dans une parabole que l'on demande de construire.

PROBLÈME

12 POINTS

On note f_0 la fonction numérique définie sur \mathbb{R}_+ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = e^{-x}.$$

Pour tout réel α strictement positif on note f_α la fonction numérique définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$f_\alpha(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_\alpha(x) = x^\alpha \cdot e^{-x}.$$

Pour tout réel α positif, on notera (\mathcal{C}_α) la courbe représentative de f_α dans un plan rapporté à un repère orthonormal.

Partie A

1. Étudier les variations de f_0 et f_1 . Représenter les courbes (\mathcal{C}_0) et (\mathcal{C}_1) sur une même figure (unité : 5 cm). On précisera la position de (\mathcal{C}_0) par rapport à (\mathcal{C}_1) .
2. Soit α un réel strictement positif et différent de 1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f_α en 0. Étudier les variations de f_α .
3. Soit α un réel strictement positif. Préciser les positions relatives sur \mathbb{R}_+^* de (\mathcal{C}_0) et (\mathcal{C}_1) . Soit deux réels α et β tels que $0 < \alpha < \beta$. Préciser les positions relatives sur \mathbb{R}_+^* de (\mathcal{C}_α) et (\mathcal{C}_β) . Démontrer que toutes les courbes (\mathcal{C}_α) passent par un même point et déterminer une équation de la tangente à la courbe (\mathcal{C}_α) en ce point.
4. Représenter les courbes (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_e) sur une même figure (unité : 5 cm), distincte de celle demandée à la question 1.
5. α étant un réel strictement positif, soit g_α la restriction de f_α à l'intervalle $[\alpha ; +\infty[$. Démontrer que g_α admet une fonction réciproque h_α .
On précisera l'ensemble de définition de h_α , le sens de variation de h_α ainsi que les propriétés de continuité et de dérivabilité de h_α .
Représenter graphiquement la courbe représentative de $h_{\frac{1}{2}}$ sur la même figure qu'à la question 4.

Partie B

Dans cette partie, on suppose que $\alpha = n$ est un entier naturel. On considère la fonction F_n définie sur \mathbb{R}_+ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt.$$

1. Calculer $F_0(x)$ et $F_1(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ et déterminer les limites des fonctions F_0 et F_1 lorsque x tend vers plus l'infini.
2. Pour $n \geq 1$ montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F_n(x) = -xe^{-x} + nF_{n-1}(x).$$

3. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier n , la fonction F_n admet une limite finie lorsque x tend vers plus l'infini. On notera cette limite u_n .
Quelle relation existe-t-il entre u_n et u_{n-1} ?
En déduire la valeur de u_n pour tout entier n .
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ étudier les variations de F_n .
On donnera l'allure de la courbe représentative de F_3 .
5. a. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{F_n(1)}{n!} = -\frac{e^{-1}}{n!} + \frac{F_{n-1}(1)}{(n-1)!}.$$

b. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{F_n(1)}{n!} = 1 - e^{-1} \left(\sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} \right).$$

c. En utilisant une majoration de $f_n(t)$ sur l'intervalle $[0; 1]$, pour $n \geq 1$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq F_n(1) \leq \frac{1}{e}.$$

d. À l'aide de 5. b. et 5. c., en déduire la limite de $\sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$ lorsque n tend vers l'infini.