Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Nice septembre 1969 ∽

EXERCICE 1

Soit O, A et B trois points donnés. Un cercle (C) passe par O et A; un cercle (C′) passe par O et B. Ces cercles (C) et (C′) varient en restant orthogonaux. Soit M leur point commun autre que O.
Déterminer l'ensemble des points M.
Caractériser géométriquement cet ensemble, selon les positions relatives des points O, A et B.
(On pourra utiliser une inversion de pôle O ou les propriétés des angles orientés inscrits dans un cercle.)

EXERCICE 2

Calculer, sous forme trigonométrique, les racines quatrièmes du nombre complexe

$$z = 8 - 8\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

PROBLÈME

Partie A

Rappels et notations : Une suite réelle est une application de l'ensemble, $\mathbb{N}$, des entiers naturels dans l'ensemble, $\mathbb{R}$, des nombres réels.
La suite de terme général u_n sera désignée par (u_n).
La somme $(u_n) + (v_n)$ de deux suites est la suite $(u_n + v_n)$.
Le produit $\lambda\,(u_n)$ d'une suite (u_n) par un réel λ est la suite (λu_n).
On se propose d'étudier l'ensemble, E, des suites (u_n) telles que

$$(1) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 2u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n = 0.$$

1. Montrer que l'addition de deux suites et la multiplication d'une suite par un réel confèrent à l'ensemble E une structure d'espace vectoriel sur le corps des réels.
2. Montrer qu'une progression géométrique (r^n), r non nul, appartient à E si, et seulement si, r vérifie la relation

$$2r^2 - 5r + 2 = 0.$$

   Calculer les valeurs de r qui répondent à la question.
3. Montrer que toute suite $\left(\lambda 2^{-n} + \mu 2^n\right)$, où λ et μ désignent deux nombres réels arbitraires, appartient à E.
4. Soit a et b deux nombres réels. Montrer qu'il existe dans E au plus une suite (u_n) vérifiant $u_0 = a$ et $u_1 = b$.

5. Utiliser le résultat de la question précédente pour montrer qu'à chaque élément (u_n) de E on peut associer un couple unique $(\lambda,\ \mu)$ de nombres réels tel que

$$(u_n) = \left(\lambda 2^{-n} + \mu 2^n\right).$$

6. Soit a et b deux nombres réels. Montrer qu'il existe dans E une suite (u_n) vérifiant $u_0 = a$ et $u_1 = b$.

   Application

   Calculer $u_3,\ u_4, \lambda$ et μ quand $a = 0$ puis quand $a = 2$ et $b = \dfrac{3}{2}$, puis quand $a = 2$ et $b = \dfrac{5}{2}$.

Partie B

Soit f_λ la fonction réelle d'une variable réelle définie par

$$f_\lambda(x) = \lambda 2^{-x} + 2^x,$$

λ désignant un paramètre réel. Soit $\mathscr{C}_\lambda$ son graphe.

1. Étudier les variations de la fonction f_λ, ainsi que ses limites quand x tend vers $\pm\infty$. (On sera amené à distinguer trois cas selon que λ est négatif, nul ou positif.)
2. Tracer, rapportées au même repère orthonormé (unité : 1 cm), les courbes $\mathscr{C}_{-1}$, $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$. On précisera la tangente à chacune de ces courbes en son point d'abscisse nulle. (Le logarithme népérien de 2 est voisin de $0,7$.)
3. Calculer l'aire, S_a, du domaine limité par les courbes $\mathscr{C}_{-1}$ et $\mathscr{C}_1$ l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = a\,(a > 0)$.