

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Nice septembre 1971 ∞

EXERCICE 1

1. On considère la fonction réelle  $f_1$  de la variable réelle  $x$  suivante :

$$\begin{cases} f_1(x) = x^2 - \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ f_1(1) = 2. \end{cases}$$

a. Étudier la continuité de  $f_1$  pour la valeur  $x = 1$ .

b. Faire l'étude et tracer la courbe représentative de  $f_1$  en repère orthonormé.

2. Mêmes questions pour la fonction  $f_2$  suivante :

$$\begin{cases} f_2(x) = \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{|x-1|} & \text{si } x \neq 1 \\ f_2(1) = 0. \end{cases}$$

EXERCICE 2

À l'aide des tables de logarithmes à cinq décimales, résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} (1) & 4^x \cdot 5^y = 5^{2x+1} \\ (2) & 12^x \cdot 8^y = 5^{2y-1}. \end{cases}$$

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes  $Ox$ ,  $Oy$ .

Partie A

À tout réel  $a$  on associe la translation notée  $(T_a)$  de vecteur directeur  $\vec{V}(a; a)$ . Dans la translation  $(T_a)$ ,  $M(x; y)$  a pour image  $M'(x+a; y+a)$ .

Montrer que l'ensemble de ces translations muni de la loi de composition ordinaire qui sera notée  $\circ$  pour les applications, a une structure de groupe commutatif.

Partie B

À tout nombre réel  $b$  on associe la transformation ponctuelle notée  $(\mathcal{T}_b)$  qui à  $M(x; y)$  fait correspondre  $M'(y-1+b; x+1+b)$ .

1. Montrer que toute transformation  $(\mathcal{T}_b)$  est une isométrie, c'est-à-dire que,  $M'$  et  $N'$  étant les images de deux points quelconques  $M$  et  $N$ , on a  $M'N' = MN$ .

2. Montrer que, parmi toutes les transformations du paragraphe B, une, et une seule, a des points invariants.
3. Montrer que l'on a

$$(\mathcal{T}_a) \circ (\mathcal{T}_b) = (\mathcal{T}_b) \circ (\mathcal{T}_a) = T_{a+b}$$

et

$$(\mathcal{T}_b) \circ (T_a) = (T_a) \circ (\mathcal{T}_b) = \mathcal{T}_{a+b}$$

### Partie C

Montrer que l'ensemble comprenant les translations du paragraphe A et les transformations du paragraphe B, muni de la loi de composition des applications, a une structure de groupe commutatif.

### Partie D

On considère la transformation  $(\mathcal{T}_0)$  associée au nombre 0 qui à  $M(\alpha ; \beta)$  fait correspondre  $M'(\beta - 1 ; \alpha + 1)$ .

Soit (D) l'ensemble de ses points invariants. Construire (D).

1. Montrer que  $(\mathcal{T}_0)$  est la symétrie par rapport à la droite (D).
2. Montrer que toute transformation  $(\mathcal{T}_b)$  est le produit d'une symétrie droite et d'une translation.

**N. B.** - La question D 2. peut être résolue avant les autres.