

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Nice septembre 1975 ∞

EXERCICE 1

On considère dans \mathbb{C} l'équation :

$$z^3 + (5 - 7i)z^2 - (4 + 12i)z - 20 + 4i = 0.$$

1. Montrer que cette équation admet une racine réelle z_1 .
2. En déduire le calcul des deux autres racines z_2 et z_3 .

EXERCICE 2

p et n désignent des entiers naturels. On pose :

$$I_{p, n} = \int_0^1 x^p (1-x)^n dx.$$

1. Calculer $I_{p, 0}$ et $I_{p, 1}$.
2. Calculer $I_{0, n}$ et en déduire $I_{1, n}$.
3. Etablir pour $n \geq 1$ la relation :

$$I_{p, n} = \frac{n}{p+1} I_{p+1, n+1}.$$

N. B. : Par convention, $x^0 = (1-x)^0 = 1$.

PROBLÈME

Si $N = \begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix}$ est une matrice 2-2 à coefficients réels et λ est un nombre réel, on définit le produit λN de N par λ à l'aide de la formule :

$$\lambda N = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda d \\ \lambda b & \lambda c \end{pmatrix}$$

On pourra admettre que l'ensemble des matrices 2-2 à coefficients réels muni de l'addition des matrices et de la multiplication externe définie ci-dessus est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

On note E l'ensemble des matrices M de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ où a, b, c appartiennent à l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels.

On pose : $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des matrices 2-2 à coefficients réels et que $(e_1, e_2, e_3,)$ est une base de E .
2. E muni de l'addition et de la multiplication matricielles est-il un anneau?

Partie B

Soit t l'application de E dans \mathbb{R} qui à la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ fait correspondre le nombre réel $t(M) = a + c$.

1. Montrer que t est une forme linéaire sur E , c'est-à-dire une application linéaire de E dans \mathbb{R} .
2. Déterminer le noyau F de t . Montrer que $(e_1 - e_3, e_2)$ est une base de F .

Partie C

On définit l'application φ de E^2 dans \mathbb{R} par $\varphi(M, M_1) = t(M_1 \cdot M)$, c'est-à-dire que $\varphi(M, M_1)$ est l'image par t du produit matriciel de M_1 et M .

1. En posant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}$, calculer $\varphi(M \cdot r M_1)$ en fonction de a, b, c, a_1, b_1, c_1 .
En déduire que φ est un produit scalaire. Dans toute la suite du problème, l'espace E sera muni de ce produit scalaire.
2. Démontrer que $I = e_1 + e_3$ est orthogonal à tout « vecteur » de F .

Partie D

1. Démontrer que pour tout M appartenant à E , on a :

$$M^2 = t(M) \cdot M - (\det M) \cdot I$$

où $\det M$ désigne le déterminant de la matrice M .

2. Si M_1 est un élément quelconque de F , montrer que M_1^2 et M_1 sont des vecteurs orthogonaux dans l'espace euclidien (E, φ) , et que M_1^3 et M_1 sont colinéaires.
Que peut-on dire de M_1^n et M_1 , n étant un entier naturel supérieur ou égal à un? Discuter.

Partie E

1. M étant un élément quelconque de E , déterminer la « projection orthogonale » M_1 de M sur F . Calculer la somme de M_1 en fonction du déterminant de M_1 .
2. On pose $M = M_1 + \lambda I$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). Déterminer λ en fonction de a et c .
3. Calculer M^2, M^3, \dots, M^n en fonction de λ, I et des puissances de M_1 .