

☞ Baccalauréat C Nice septembre 1979 ☞

EXERCICE 1

4 POINTS

On considère la fonction numérique d'une variable réelle, f définie par

$$f(x) = \frac{1}{e}x - \text{Log } x$$

où e est la base du logarithme népérien, noté Log .

1. Étudier les variations de f et construire sa courbe représentative (\mathcal{C}) dans un repère orthonormé.
2. Soit λ un nombre réel tel que $0 < \lambda < e$.
Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine plan déterminé par la courbe (\mathcal{C}), l'axe des x , et les droites d'équations respectives $x = \lambda$ et $x = e$.
3. Déterminer la limite éventuelle de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers 0 par valeurs supérieures.

EXERCICE 2

4 POINTS

On joue avec deux dés cubiques non pipés.

Les faces de l'un sont marquées : $0, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$.

Les faces de l'autre : $0, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$.

On lance les deux dés simultanément. On appelle α et β les nombres qui apparaissent sur les faces supérieures, et on appelle X la variable aléatoire réelle qui à chaque lancer associe le réel $\sin(\alpha + \beta)$.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ? (On pourra présenter les résultats sous forme de tableau).
2. Établir la loi de probabilité de X , et calculer son espérance mathématique, sa variance et son écart-type.

PROBLÈME

12 POINTS

Soit E un plan affine rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

Soit g_t l'application affine de E dans E , qui au point M de coordonnées $(x; y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'; y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = x \cos t + 2y \sin t \\ y' = \frac{1}{2}x \sin t - y \cos t \end{cases} \quad \text{ou } t \text{ est un nombre réel}$$

1. Démontrer que g_t est involutive et que c'est une symétrie dont on déterminera les éléments géométriques.

2. Soit s la symétrie d'axe Ox , de direction Oy . Déterminer analytiquement $g_t \circ s$.

Partie B

Soit f_t l'application affine de E dans E , qui au point M de coordonnées $(x; y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'; y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = x \cos t - 2y \sin t \\ y' = \frac{1}{2}x \sin t + y \cos t \end{cases} \quad \text{ou } t \text{ est un nombre réel}$$

On appelle \mathcal{F} l'ensemble des applications f_t pour t élément de \mathbb{R} .

1. Soit φ l'application définie par :

$$\begin{array}{ccc} \varphi: \mathbb{R} & \rightarrow & \mathcal{F} \\ t & \longmapsto & f_t \end{array}$$

Démontrer que φ est un homomorphisme surjectif de $(\mathbb{R}, +)$ dans (\mathcal{F}, \circ) .

Démontrer que (\mathcal{F}, \circ) est un groupe commutatif. Quelle est l'application réciproque de f_t ?

2. Déterminer l'ensemble \mathcal{K} des nombres réels t tels que

$$\varphi(t) = \text{id}_E$$

(id_E est l'application identique de E dans E).

Quelle relation doit exister entre t et t' pour que $f_{t'} = f_t$?

3. n désignant un entier naturel non nul, on pose :

$$\begin{cases} f_t^1 = f_t \\ f_t^n = f_t^{n-1} \circ f_t \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_t^n = f_{nt}$.

On donne à t la valeur $t_0 = \frac{3}{5}2\pi$.

Trouver le plus petit entier n tel que $f_{t_0}^n = \text{id}_E$.

4. On a toujours $t_0 = \frac{3}{5}2\pi$.

On appelle Γ l'ensemble des cinq points $\{M_0, M_1, M_2, M_3, M_4\}$ où M_0 a pour coordonnées $(x_0; y_0)$.

$$\begin{aligned} M_1 &= f_{t_0}(M_0) \\ M_2 &= f_{t_0}(M_1) \\ M_3 &= f_{t_0}(M_2) \\ M_4 &= f_{t_0}(M_3) \end{aligned}$$

- a. Démontrer que Γ est stable par f_t .

- b. On appelle (\mathcal{C}_a) la courbe d'équation $x^2 + 4y^2 = a^2$, a étant un nombre réel.

Démontrer que, quel que soit t appartenant à \mathbb{R} , (\mathcal{C}_a) est invariante par f_t .

- c. Démontrer que Γ est contenu dans la courbe (\mathcal{C}_a) pour la valeur $a = x_0^2 + 4y_0^2$.

Partie C

Dans cette partie, on suppose E euclidien et le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé.

1. Dans cette question $a = x_0^2 + 4y_0^2$ et $t_0 = \frac{3}{5}2\pi$.
Écrire l'équation de la tangente à (\mathcal{C}_a) au point M_0 . Quelle est l'image de cette tangente par f_t ?
2. Soit A le point de coordonnées $(1; 0)$ et soit M_t l'image de A par f_t . Déterminer l'ensemble (G) des points M_t lorsque f_t varie dans \mathcal{F} . Représenter (G) .

Partie D

F est un espace affine euclidien de dimension trois, rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit P le point mobile dont les coordonnées $(x; y; z)$ sont à l'instant t .

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \frac{1}{2} \sin t \\ z = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ appartient à } \mathbb{R}$$

Montrer que la trajectoire de P est un cercle, intersection d'une sphère (Σ) et d'un plan (π) à déterminer.

Quelle est la nature du mouvement de P ?