Baccalauréat C septembre 1981 Nice

EXERCICE 1

1. Soit g l'application numérique définie par :

$$g: \quad \mathbb{R}^{\star} \to \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{llcl} x > 0, & x & \longmapsto & x^2 + (1 - \text{Log}\, x) \\ x < 0, & x & \longmapsto & x^2 - (1 - \text{Log}\, |x|) \end{array}$$

Log x désigne le logarithme nepérien de x.

Étudier les variations de g. On ne demande pas de construire la courbe représentative. Calculer $g(-1)$.

2. Soit f l'application numérique définie par

$$\begin{array}{llcl} f: & \mathbb{R}^{\star} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x + \dfrac{\text{Log}\,|x|}{|x|} \end{array}$$

Étudier les variations de f, préciser les limites, les asymptotes et la position de la courbe par rapport à l'asymptote oblique.

Construire la courbe dans un repère orthonormé.

3. Calculer l'aire du domaine limité par les droites d'équations respectives $x = 1$, $x = \text{e}$, la courbe représentative de f et son asymptote oblique.

EXERCICE 2

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\right\}$ l'équation

$$X^2 + \overline{2}X + \overline{6} = \overline{0}.$$

2. Déterminer toutes les bases de numération b dans lesquelles le nombre qui s'écrit 126 en base b est divisible par 7 et par 6.

EXERCICE 3

Partie A

On désigne par E un espace vectoriel réel euclidien de dimension 3, et par $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ une base orthonormée de E.

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ étant deux vecteurs quelconques de E, on note $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ leur produit scalaire et $\left\|\overrightarrow{u}\right\|$ la norme de $\overrightarrow{u}$.

1. Soit f l'endomorphisme de E défini par

$$\left\{\begin{array}{lcl} f\left(\overrightarrow{\imath}\right) &=& -\overrightarrow{\imath}+2\overrightarrow{\jmath}-2\overrightarrow{k}\\ f\left(\overrightarrow{\jmath}\right) &=& 2\overrightarrow{\imath}-\overrightarrow{\jmath}-2\overrightarrow{k}\\ f\left(\overrightarrow{k}\right) &=& -2\overrightarrow{\imath}-2\overrightarrow{\jmath}-\overrightarrow{k}.\end{array}\right.$$

   Démontrer que $\forall \overrightarrow{v} \in \text{E}$, $\left\|f\left(\overrightarrow{v}\right)\right\| = 3\left\|\overrightarrow{v}\right\|$.

2. Soit g l'endomorphisme de E qui au vecteur ayant pour coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ dans la base $\left(\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$ fait correspondre le vecteur ayant pour coordonnées dans cette base :

$$\left\{\begin{array}{l} x' = \dfrac{1}{3}(-x+2y-2z)\\ y' = \dfrac{1}{3}(2x-y-2z)\\ z' = -\dfrac{1}{3}(2x+2y+z).\end{array}\right.$$

   Montrer que f est la composée de g et d'une homothétie de rapport 3.

   En déduire que g est une isométrie vectorielle.

3. Montrer que g est un demi-tour (c'est-à-dire une rotation vectorielle d'angle plat) dont on précisera l'axe.

4. Soit P le plan vectoriel engendré par les vecteurs $\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath} - \overrightarrow{k}$.

   Montrer que P est globalement invariant par g et par f.

   Montrer que $\tilde{f}$, restriction de f au plan P est la composée de deux endomorphismes simples de P qu'on précisera.

Partie B

On désigne par $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien associé à E, par O un point de $\mathscr{E}$, par R le repère $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$.

m étant un nombre réel, on désigne par A_m le point de coordonnées $(1\,;\,2\,;\,m)$ dans R, et par G_m le vissage de $\mathscr{E}$ dont l'endomorphisme associé est g et qui transforme O en A_m.

1. Démontrer qu'il existe un unique réel m_0 tel que G_{m_0} soit une rotation. Préciser les éléments caractéristiques de G_{m_0}.

2. Déterminer la rotation r_m et la translation t_m de vecteur parallèle à l'axe de r_m telles que

$$G_m = r_m \circ t_m = t_m \circ r_m.$$

   D_m désigne l'axe de r_m. Démontrer que D_m est contenue dans un plan affme indépendant de m.

3. Soit Q le plan affine ayant pour équation cartésienne dans le repère R : $x - y + \dfrac{1}{2} = 0$.

   Démontrer que Q est globalement invariant par G_m. Caractériser la restriction de G_m à Q.

Partie C

On désigne par B_m le point de coordonnées $(2~;~4~;~2m)$ dans R et par F_m l'application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ dont l'endomorphisme associé est f et qui transforme O en B_m.

1. Si H désigne l'homothétie de centre O et de rapport 3, montrer qu'il existe une translation T telle que

$$F_m = T \circ H \circ G_m.$$

   Déterminer T.

2. En déduire que D_m est globalement invariant par F_m.