

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Nice septembre 1984 ∞

EXERCICE 1

5 points

1.  $u$  étant un nombre complexe de module 1 et d'argument  $\theta \in ]0 ; 2\pi[$ , déterminer le module et un argument du nombre complexe  $z$  tel que

$$\frac{z-i}{z+i} = u.$$

2. On considère l'équation dans  $\mathbb{C}$  :

$$(E) : (z^2 + 1)^n - (z+i)^{2n} = 0$$

où  $n$  est un entier non nul donné.

En remarquant que  $-i$  est solution de (E), résoudre (E).

EXERCICE 2

5 points

In considère, dans le plan, une droite donnée (D), et un point donné A, n'appartenant pas à (D).

1. Quel est l'ensemble des foyers des paraboles passant par le point A et ayant pour directrice la droite (D) ?  
Représenter cet ensemble dans le plan.
2. Démontrer que l'ensemble des sommets des paraboles passant par A et ayant (D) pour directrice est inclus dans une ellipse (E).  
Déterminer (E) sur la figure précédente.

PROBLÈME

10 points

Les parties II et III sont indépendantes, l'une de l'autre.

La partie III est, dans une large mesure, indépendante de I.

Soit le plan  $\mathcal{P}$  rapporté à un repère orthonormal  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ . Dans tout le problème on note, pour tout  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $f_p$  la fonction définie par :

$$\begin{cases} f_p(x) = x^p \ln|x| & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ f_p(0) = 0. \end{cases}$$

Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f_p$  dans  $\mathcal{R}$ .

Partie I

1. Étudier, suivant les valeurs de  $p$ , la continuité et la dérivabilité de  $f_p$  en 0.
2. Étudier la parité de  $f_p$ .  
Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ .

3. a. Calculer la limite de  $f_p$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .  
b. Étudier les variations de  $f_p$  (on distinguera 4 cas :  
 $p < 0, p = 0, p = 1, p > 1$ ).
4. En calculant un développement limité d'ordre 1 de  $(1+h)^p$  en zéro, et un développement limité d'ordre 2 de  $\ln(1+h)$  en zéro, déduire un développement limité d'ordre 2 de  $f_p(1+h)$  en zéro.  
En déduire l'équation de la tangente D à toutes les courbes  $\mathcal{C}_p$  au point d'abscisse 1, ainsi que les positions relatives de  $\mathcal{C}_p$  et de D suivant les valeurs de  $p$ .
5. Donner l'allure des courbes  $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_{-2}$ . On fera trois figures différentes, et l'on prendra 2 cm comme unité.
6. Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , déterminer, en intégrant par parties, l'aire de la partie de plan limitée par la droite  $(O, \vec{i})$ , les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e^{\frac{1}{p+1}}$  et la courbe  $\mathcal{C}_p$ .

### Partie II

On considère la fonction  $g = f_1 \circ \sin$ .

$$\text{On a donc } \begin{cases} g(x) &= \sin x \ln |\sin x| \quad \text{si } x \neq k\pi \\ g(k\pi) &= 0. \end{cases}$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de  $g$  en 0.
2. Montrer qu'il existe un seul  $x_0 \in [0; \frac{\pi}{2}]$  tel que  $\sin x_0 = \frac{1}{e}$ .
3. Étudier les variations de  $g$  en précisant la période et la parité; puis tracer la courbe représentative de  $g$  sur une période, dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 2 cm).

### Partie III

On considère la suite  $(u_p)$  définie par  $u_0$  et pour tout  $p$  appartenant à  $\mathbb{N}$ ,

$$u_{p+1} = f_1(u_p).$$

1. Étudier  $(u_p)$  dans le cas où  $u_0 = 0$ ;  $u_0 = e$ ;  $u_0 = -e$ .
2. Si  $u_0 = \frac{1}{e}$  ou  $u_0 = -\frac{1}{e}$ , montrer que  $(u_p)$  est une suite géométrique.  
Est-elle convergente?
3. On se place dans le cas où  $|u_0| > e$ .
  - a. Si  $u_0 > e$ , montrer que  $u_1 > u_0 > e$  et, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_p > u_{p-1} > e$ .
  - b. Si  $u_0 < -e$ , montrer que  $u_1 < u_0 < -e$  et, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_p < u_{p-1} < -e$ .  
Dans ces cas a et b montrer que  $|u_p| \geq |u_0| (\ln |u_0|)^p$ .  
La suite  $(u_p)$  est-elle convergente?