∾ Baccalauréat C Nice juin 1977 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Trouver tous les couples $(a\ ;\ b)$ d'entiers naturels non nuls, avec $a \leqslant b$, qui vérifient :

$$m + 10d = 142,$$

où m et d désignent respectivement le plus petit commun multiple (ppcm) et le plus grand commun diviseur (pgcd) de a et b.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

1. Étudier la fonction numérique :

$$f\ :\ x \longmapsto \text{Log}\left(1 - \text{Log}\, x\right)$$

   Construire la courbe représentative C de f dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   (On prendra $\left\|\vec{\imath}\right\| = \left\|\vec{\jmath}\right\| = 2$ cm).
2. Montrer que f est une bijection de son ensemble de définition sur un ensemble que l'on précisera.
   Construire la courbe représentative C' de f^{-1} dans le repère $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   Exprimer la fonction f^{-1} au moyen de la fonction exponentielle de base e.

PROBLÈME **11 POINTS**

Soit $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs.
À tout couple $(a\ ;\ b)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$,on associe l'application $f_{a,\ b}$ b de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par : a,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f_{a,\ b}(z) = \text{e}^a z + (\text{Log}\, b)\overline{z}$$

où Log désigne le logarithme népérien et $\overline{z}$ le nombre complexe conjugué de z.

Partie A

On rappelle que $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 et que (1, i) en est une base.

1. Démontrer que $f_{a,\ b}$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel $\mathbb{C}$ et déterminer la matrice $M_{a,\ b}$ de $f_{a,\ b}$ dans la base (1, i).
2. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications $f_{a,\ 1}$ lorsque a décrit $\mathbb{R}$.
   Démontrer que $(\mathcal{F}, \circ)$ est un groupe commutatif isomorphe à $(\mathbb{R},\ +)$.
   Quelle est la nature des éléments de $\mathcal{F}$?
3. Démontrer que l'ensemble des couples (a, b) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ pour lesquels $f_{a,\ b}$ n'est pas bijective, est l'ensemble défini par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} b & \in &]0\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[\\ a & = & \text{Log}\left(|\text{Log}\, b|\right) \end{array}\right.$$

4. Pour tout élément b de $]0\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$,on pose :

$$g_b = f_{\text{Log}(|\text{Log}\, b|),\ b}.$$

a. Préciser la matrice N_b de g_b dans la base (1, i) dans les deux cas suivants :

$$0 < b < 1 \quad \text{et} \quad b > 1$$

b. Trouver la nature de $g_{\sqrt{\text{e}}}$ et de $g_{\frac{1}{\sqrt{\text{e}}}}$.

En déduire que, pour tout élément b de $]0\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$, g_b est le composé de deux endomorphismes simples que l'on déterminera.

c. On considère : $b > 1$ et on pose, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \left[g_b(1)\right]^n.$$

Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

Étudier, suivant la valeur de b, la convergence de cette suite.

Partie B

Soit P un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

Pour tout couple $(a\ ;\ b)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$,on désigne par $F_{a,\ b}$ l'application de P dans P qui, à tout point M, d'affixe z, associe le point M', d'affixe $F_{a,\ b}(z)$.

1. Trouver l'ensemble E_1 des points M de P dont l'image par $F_{a,\ b}$ appartient au cercle de centre O et de rayon 1.

Donner, suivant les couples $(a\ ;\ b)$, la nature de E_1.

2. Trouver l'ensemble E_2 des points M de P dont l'image par $F_{a,\ b}$ est un point dont l'affixe z' satisfait à :

$$\arg z' = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi).$$

3. Soit E_3 l'ensemble des points de P invariants par $F_{a,\ b}$. Déterminer E_3 pour les couples $(a\ ;\ b)$ qui satisfont à :

$$\text{e}^a = 1 - \text{Log}\, b.$$