Durée : 4 heures

Baccalauréat C Nouvelle-Calédonie novembre 1985

EXERCICE 1 **4 points**

1. **a.** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^3 - 1 = 0.$$

   b. En déduire un polynôme du second degré de la forme $z^2 + bz + c$, (b et c sont des nombres réels), ayant pour zéros les racines cubique de l'unité non réelles.

2. Étant donné un nombre complexe z, on pose $\varphi(z) = z^2 + z + 1$.

   Soit P le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$, l'unité de longueur étant 3 cm.

   a. Déterminer l'ensemble E_1 des points M d'affixe z tels que $\varphi(z)$ soit réel.

   b. Démontrer que l'ensemble E_2 des points M d'affixe z tels que $\varphi(z)$ soit imaginaire pur est une conique dont on précisera une équation réduite.

   c. Représenter sur une même figure les ensemble E_1 et E_2 ; déterminer les affixes des points de $E_1 \cap E_2$.

EXERCICE 2 **5 points**

On considère dans l'espace E, un carré ABCD, de centre O et de côté a, contenu dans un plan P.
Soient S un point de E n'appartenant pas au plan P et A$'$, B$'$, C$'$, D$'$ les milieux respectifs des segments [SA], [SB], [SC], [SD].

1. Démontrer que :

   a. les points A$'$, B$'$, C$'$, D$'$ appartient à un même plan P$'$ parallèle au plan P et P$' \neq$ P;

   b. le quadrilatère A$'$B$'$C$'$D$'$ est un carré; on note O$'$ son centre;

   c. les points S, O, O$'$ sont alignés.

   Dessiner un croquis de la figure ainsi obtenue.

2. Déterminer l'ensemble Ω des points M du plan P tels que :

$$M\text{A}^2 + M\text{B}^2 + M\text{C}^2 + M\text{D}^2 = 4a^2.$$

   Déterminer l'ensemble décrit par le milieu M' du segment [SM] quand le point M décrit l'ensemble Ω.

PROBLÈME **11 points**

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x \text{e}^{-t^2-1}\,\text{d}t.$$

On ne cherchera pas à calculer $F(x)$.

Partie I

L'objet de cette partie est l'étude de la fonction F et de sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ où l'unité graphique est 4 cm.

1. Étudier la parité de F.
2. Montrer que F est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et calculer sa dérivée ; en déduire la sens de variation de F sur $[0\,;\,+\infty[$.
3. Démontrer que pour tout $x > 0$, $F(x) \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\text{e}}\,\text{d}t$.
   En déduire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente au point d'abscisse nulle.
4. **a.** Prouver que pour tout $x \geqslant 0$, $F(x) \leqslant \text{e}^{-2t}\,\text{d}t$.
   En déduire que F est bornée sur $[0\,;\,+\infty[$.
   b. On admettra que les résultats acquis aux I 2. et I 4. a. permettent de conclure que F possède une limite λ quand x tend vers $+\infty$. Montrer que $\lambda \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   c. Tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}$.

Partie II

On se propose maintenant d'étudier la fonction numérique G définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$G(x) = \int_x^{2x} \text{e}^{-t^2-1}\,\text{d}t.$$

‘

1. Exprimer $G(x)$ à l'aide de la fonction F.
2. Démontrer que G est dérivable et calculer sa dérivée G'.
3. Soit φ la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = 2x\text{e}^{-x^4+x^2} - 1.$$

   a. Étudier les variations de φ.
   b. Démontrer l'existence de deux réels α_1 et α_2 vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{l l l l} 0 & < & \alpha_1 & < \dfrac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2} \\ 1 & < & \alpha_2 & < 2 \\ \varphi(\alpha_1) & = & \varphi(\alpha_2) & = 0. \end{array}\right.$$

   c. En déduire, suivant les valeurs de x, le signe de $\varphi(x)$.
   d. Exprimer $G'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$; en déduire le tableau de variations de G.

4. **a.** Trouver deux solutions distinctes et positives, x_1 et x_2, de l'équation $G(x) = 0$.
   b. Soit Γ la courbe représentative de G. On désigne par M_1 (resp. M_2) le point de Γ d'abscisse x_1 (resp. x_2) ; écrire une équation de la tangente à Γ en M_1 (resp. M_2).
   c. Tracer Γ ; (rappel : l'unité graphique est 4 cm).