∽ Baccalauréat S Nouvelle–Calédonie décembre 2001 ∾

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie I

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives :

$$(-1\ ;\ 0\ ;\ 2), \quad (3\ ;\ 2\ ;\ -4), \quad (1\ ;\ -4\ ;\ 2), \quad (5\ ;\ -2\ ;\ 4).$$

On considère les points I, J et K définis par : I est le milieu du segment [AB], K est le milieu du segment [CD] et $\overrightarrow{\text{BJ}} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\text{BC}}$.

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.
2. **a.** Montrer que les points I, J et K ne sont pas alignés.
   b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est :
   $$8x + 9y + 5z - 12 = 0.$$
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AD) et montrer que le plan (IJK) et la droite (AD) sont sécants en un point L dont on déterminera les coordonnées.
   d. Montrer que :
   $$\overrightarrow{\text{AL}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{AD}}.$$

Partie II

Plus généralement, dans l'espace E, on considère un tétraèdre ABCD ainsi que les points I, J, K et L définis par I est le milieu du segment [AB], K est le milieu du segment [CD].

$$\overrightarrow{\text{AL}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{AD}} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\text{BJ}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{BC}}$$

Soit G le barycentre de (A, 3), (B, 3), (C, 1), D, 1).

1. Déterminer les barycentres de {(A, 3), (D, 1)} et le barycentre de {(B, 3), (C, 1)}.
2. En associant les points A, B, C et D de deux façons différentes, montrer que G appartient aux droites (IK) et (JL).
   En déduire que les points I, J, K et L sont coplanaires.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique : 4 cm. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Soit A le point d'affixe $z_{\text{A}} = -\text{i}$ et B le point d'affixe $z_{\text{B}} = -2\text{i}$.
On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z, M distinct de A, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \dfrac{\text{i}z - 2}{z + \text{i}}$.

1. Démontrer que, si z est un imaginaire pur, $z \neq -\text{i}$, alors z' est imaginaire pur.
2. Déterminer les points invariants par l'application f.
3. Calculer $\left|z' - \text{i}\right| \times |z + \text{i}|$.
   Montrer que, quand le point M décrit le cercle de centre A et de rayon 2, le point M' reste sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
4. **a.** Développer $(z + \text{i})^2$, puis factoriser $z^2 + 2\text{i}z - 2$.
   b. Déterminer et représenter l'ensemble des points M, tels que M' soit le symétrique de M par rapport à O.
5. Déterminer et représenter l'ensemble E des points M, tels que le module de z' soit égal à 1.
   $\left(\text{On pourra remarquer que } z' = \dfrac{\text{i}\left(z - z_{\text{B}}\right)}{z - z_{\text{A}}}.\right)$.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Partie I

Soit x un nombre réel.

1. Montrer que $x^4 + 4 = \left(x^2 + 2\right)^2 - 4x^2$.
2. En déduire que $x^4 + 4$ peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficients réels.

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère les entiers $A = n^2 - 2n + 2$ et $B = n^2 + 2n + 2$ et d leur PGCD.

1. Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier.
2. Montrer que, tout diviseur de A qui divise n, divise 2.
3. Montrer que, tout diviseur commun de A et B, divise $4n$.
4. Dans cette question on suppose que n est impair.
   a. Montrer que A et B sont impairs. En déduire que d est impair.

b. Montrer que d divise n.

c. En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.

5. On suppose maintenant que n est pair.

a. Montrer que 4 ne divise pas $n^2 - 2n + 2$.

b. Montrer que d est de la forme $d = 2p$, où p est impair.

c. Montrer que p divise n. En déduire que $d = 2$. (On pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question **4**)

PROBLÈME **5 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \left(x^2 + 4x + 3\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$; l'unité graphique est 2 cm.

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire *g*

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \left(x^2 + 2x - 1\right)\mathrm{e}^{-x} + 1.$$

1. Étudier les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x)$ et $(3 - x^2)$ ont le même signe.

3. En déduire le tableau de variations de g.

4. **a.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$. Vérifier que $g(0) = 0$. On note α la solution non nulle.

b. Prouver que $-2,4 < \alpha < -2,3$.

5. En déduire le signe $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B - Étude de la fonction *f*

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. **a.** Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = g(x)$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$, est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.

4. **a.** Montrer que la droite (D)et la courbe $(\mathscr{C})$ se coupent en deux points A et B dont on donnera les coordonnées.

b. Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe $(\mathscr{C})$.

5. Construire la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (D).

Partie C - Calculs d'aire

1. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction H soit une primitive de la fonction h définie par :

$$h(x) = \left(x^2 + 4x + 3\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

2. Déterminer l'aire, en unités d'aire, de la partie de plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (D).

3. Soit m un réel strictement supérieur à -1. On considère le domaine $(\mathscr{D}_m)$ délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = -1$ et $x = m$.

a. Calculer l'aire $(\mathscr{A}_m)$ du domaine $(\mathscr{D}_m)$, en unités d'aire.

b. Déterminer la limite de $(\mathscr{A}_m)$ lorsque m tend vers $+\infty$.