

## Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars 2009

### EXERCICE 1

4 points

#### Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 1 cm. On considère les points A et B d'affixes respectives  $z_A = 1$  et  $z_B = 3 + 4i$ .

Soit C et D les points d'affixes respectives  $z_C = 2\sqrt{3} + i(-2 - \sqrt{3})$  et  $z_D = -2\sqrt{3} + i(-2 + \sqrt{3})$ .

L'objet de l'exercice est de proposer une construction géométrique des points D et C.

1.
  - a. Montrer que l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  est le point D.
  - b. En déduire que les points B et D sont sur un cercle  $\mathcal{C}$  de centre A dont on déterminera le rayon.
2. Soit F, l'image du point A par l'homothétie de centre B et de rapport  $\frac{3}{2}$ .
  - a. Montrer que l'affixe  $z_F$  du point F est  $-2i$ .
  - b. Montrer que le point F est le milieu du segment [CD].
  - c. Montrer que  $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = -i\sqrt{3}$ . En déduire la forme exponentielle de  $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F}$ .  
Déduire des questions précédentes que la droite (AF) est la médiatrice du segment [CD].
3. Proposer un programme de construction pour les points D et C à partir des points A, B et F et réaliser la figure.

*Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

### EXERCICE 2

5 points

#### Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est rapporté au repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère les points :

$$A(4; 0; 0), \quad B(0; 2; 0), \quad C(0; 0; 3) \quad \text{et} \quad E\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{9}\right)$$

On se propose de déterminer de deux façons la distance  $\delta_E$  du point E au plan (ABC).

**RAPPEL :** Soit  $(\mathcal{P})$  un plan d'équation  $ax + by + cz + d = 0$  où  $a, b, c$  et  $d$  sont des nombres réels avec  $a, b$  et  $c$  non tous nuls et  $M$  un point de coordonnées  $(x_M; y_M; z_M)$  la distance  $\delta_M$  du point  $M$  au plan  $(\mathcal{P})$  est égale à :

$$\frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

1.
  - a. Montrer que les points A, B et C déterminent bien un plan.
  - b. Soit  $\vec{n}$  le vecteur de coordonnées  $(3; 6; 4)$ .  
Montrer que  $\vec{n}$  est un vecteur normal au plan (ABC).
  - c. Montrer qu'une équation du plan (ABC) est :  $3x + 6y + 4z - 12 = 0$ .

- d. Déduire des questions précédentes la distance  $\delta_E$ .
2. a. Montrer que la droite ( $\mathcal{D}$ ) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = \frac{5}{9} + \frac{4}{3}t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R},$$

est perpendiculaire au plan (ABC) et passe par le point E.

- b. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal G du point E sur le plan (ABC).
- c. Retrouver à partir des coordonnées des points E et G la distance  $\delta_E$ .

**EXERCICE 3****5 points****Commun à tous les candidats**

Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles.

La probabilité que la première cible soit atteinte est  $\frac{1}{2}$ .

Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est  $\frac{3}{4}$ .

Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est  $\frac{1}{2}$ .

On note, pour tout entier naturel  $n$  non nul :

- $A_n$  l'évènement : « la  $n$ -ième cible est atteinte ».
- $\overline{A_n}$  l'évènement : « la  $n$ -ième cible n'est pas atteinte ».
- $a_n$  la probabilité de l'évènement  $A_n$
- $b_n$  la probabilité de l'évènement  $\overline{A_n}$ .

1. Donner  $a_1$  et  $b_1$ .

Calculer  $a_2$  et  $b_2$ . On pourra utiliser un arbre pondéré.

2. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$  :  $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n$ ,

puis :  $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$

3. Soit  $(U_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  non nul, par  $U_n = a_n - \frac{2}{3}$ .

- a. Montrer que la suite  $(U_n)$  est une suite géométrique.  
On précisera la raison et le premier terme  $U_1$ .
- b. En déduire l'expression de  $U_n$  en fonction de  $n$ , puis l'expression de  $a_n$  en fonction de  $n$ .
- c. Déterminer la limite de la suite  $(a_n)$ .
- d. Déterminer le plus petit entier naturel  $n$  tel que :  $a_n \geq 0,6665$ .

**EXERCICE 4****6 points****Commun à tous les candidats**

Soit  $f$  une fonction définie pour tout nombre réel  $x$  par

$$f(x) = (1+x)e^{-x}.$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 1 cm.

1.
  - a. Étudier le signe de  $f(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - b. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$ .  
Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
  - c. On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .  
Calculer, pour tout nombre réel  $x$ ,  $f'(x)$ .  
En déduire les variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - d. Tracer la courbe représentative de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[-2 ; 5]$ .
2. On note  $(I_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$I_n = \int_{-1}^n f(x) dx.$$

Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de  $I_n$  en fonction de  $n$ .

- a. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $I_n \geq 0$ .
  - b. Montrer que la suite  $(I_n)$  est croissante.
3. a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tous réels  $a$  et  $b$  :

$$\int_a^b f(x) dx = (-2 - b)e^{-b} + (2 + a)e^{-a}.$$

- b. En déduire l'expression de  $I_n$  en fonction de  $n$ .
  - c. Déterminer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .
  - d. Donner une interprétation graphique de cette limite.
4. Déterminer  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que :  $\int_{-1}^{\alpha} f(x) dx = e$ .  
Ce calcul intégral correspond-il à un calcul d'aire?