

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie novembre 2007 ∞

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point; une réponse inexacte enlève 0,25 point; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

1. Une solution de l'équation $2z + \bar{z} = 9 + i$ est :
 - a. 3
 - b. i
 - c. $3 + i$
2. Soit z un nombre complexe; $|z + i|$ est égal à :
 - a. $|z| + 1$
 - b. $|z - 1|$
 - c. $|i\bar{z} + 1|$
3. Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ . Un argument de $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{\bar{z}}$ est :
 - a. $-\frac{\pi}{3} + \theta$
 - b. $\frac{2\pi}{3} + \theta$
 - c. $\frac{2\pi}{3} - \theta$
4. Soit n un entier naturel. Le complexe $(\sqrt{3} + i)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si :
 - a. $n = 3$
 - b. $n = 6k + 3$, avec k relatif
 - c. $n = 6k$ avec k relatif
5. Soient A et B deux points d'affixe respective i et -1 . l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - i| = |z + 1|$ est :
 - a. la droite (AB)
 - b. le cercle de diamètre [AB]
 - c. la droite perpendiculaire à (AB) passant par O
6. Soit Ω le point d'affixe $1 - i$. L'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant $|z - 1 + i| = |3 - 4i|$ a pour équation :
 - a. $y = -x + 1$
 - b. $(x - 1)^2 + y^2 = \sqrt{5}$
 - c. $z = 1 - i + 5e^{i\theta}$ avec θ réel
7. Soient A et B les points d'affixes respectives 4 et $3i$. L'affixe du point C tel que le triangle ABC soit isocèle avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$ est :
 - a. $1 - 4i$
 - b. $-3i$
 - c. $7 + 4i$
8. L'ensemble des solutions dans \mathbb{C} de l'équation $\frac{z - 2}{z - 1} = z$ est :
 - a. $\{1 - i\}$
 - b. L'ensemble vide
 - c. $\{1 - i; 1 + i\}$

EXERCICE 2**5 points****Commun à tous les candidats**

Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second.

La proportion de composants défectueux est de 3 % chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second.

On note :

- D l'évènement « le composant est défectueux »;
- F_1 l'évènement « le composant provient du premier fournisseur »;
- F_2 l'évènement « le composant provient du second fournisseur ».

1.
 - a. Dessiner un arbre pondéré.
 - b. Calculer $p(D \cap F_1)$, puis démontrer que $p(D) = 0,0225$.
 - c. Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur?

Dans toute la suite de l'exercice, on donnera une valeur approchée des résultats à 10^{-3} près.

2. Le responsable commande 20 composants. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux?
3. La durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire notée X qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement ou loi exponentielle de paramètre λ , avec λ réel strictement positif.
 - a. Sachant que $p(X > 5) = 0,325$, déterminer λ .
Pour les questions suivantes, on prendra $\lambda = 0,225$.
 - b. Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans? plus de 8 ans?
 - c. Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 ans?

EXERCICE 3**6 points****Commun à tous les candidats****Partie A : question de cours**

1. Soit f une fonction réelle définie sur $[a; +\infty[$. Compléter la phrase suivante :
« On dit que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ si ... »
2. Démontrer le théorème « des gendarmes » : soient f , g et h trois fonctions définies sur $[a; +\infty[$ et ℓ un nombre réel. Si g et h ont pour limite commune ℓ quand x tend vers $+\infty$, et si pour tout x assez grand $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, alors la limite de f quand x tend vers $+\infty$ est égale à ℓ .

Partie B

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^x - x - 1$$

et soit (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan. La droite (D) d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à (\mathcal{C}) . On a représenté sur la feuille annexe la courbe (\mathcal{C}) et la droite (D) .

1. Soit a un nombre réel. Écrire, en fonction de a , une équation de la tangente (T) à (\mathcal{C}) au point M d'abscisse a .
2. Cette tangente (T) coupe la droite (D) au point N d'abscisse b . Vérifier que $b - a = -1$.
3. En déduire une construction, à effectuer sur la feuille annexe, de la tangente (T) à (\mathcal{C}) au point M d'abscisse 1,5. On fera apparaître le point N correspondant.

Partie C

1. Déterminer graphiquement le signe de f .
2. En déduire pour tout entier naturel non nul n les inégalités suivantes :

$$(1) \quad e^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n} \quad (2) \quad e^{-\frac{1}{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{n+1}.$$

3. En utilisant l'inégalité (1), démontrer que pour tout entier naturel non nul n

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e.$$

4. En utilisant l'inégalité (2), démontrer que pour tout entier naturel non nul n

$$e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

5. Déduire des questions précédentes un encadrement de

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

puis sa limite en $+\infty$.

EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit OABC un tétraèdre trirectangle (les triangles OAB, OBC, OCA sont rectangles en O). On note H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de ce tétraèdre.

1. **a.** Pourquoi la droite (OH) est-elle orthogonale à la droite (BC) ?
Pourquoi la droite (OA) est-elle orthogonale à la droite (BC) ?
- b.** Démontrer que les droites (AH) et (BC) sont orthogonales. On démontrera de façon analogue que les droites (BH) et (AC) sont orthogonales. Ce résultat est ici admis.
- c.** Que représente le point H pour le triangle ABC ?
2. L'espace est maintenant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points A(1 ; 0 ; 0), B(0 ; 2 ; 0) et C(0 ; 0 ; 3).

- a. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
 - b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par O et orthogonale au plan (ABC).
 - c. Démontrer que le plan (ABC) et la droite (D) se coupent en un point H de coordonnées $\left(\frac{36}{49}; \frac{18}{49}; \frac{12}{49}\right)$.
3. a. Calculer la distance du point O au plan (ABC).
 - b. Calculer le volume du tétraèdre OABC. En déduire l'aire du triangle ABC.
 - c. Vérifier que le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des autres faces de ce tétraèdre.

EXERCICE 4**5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

1. a. Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11? Justifier.
 - b. Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5? Justifier.
 - c. En déduire que $6^{40} \equiv 1 [11]$ et que $6^{40} \equiv 1 [5]$.
 - d. Démontrer que $6^{40} - 1$ est divisible par 55.
2. Dans cette question x et y désignent des entiers relatifs.

- a. Montrer que l'équation

$$(E) \quad 65x - 40y = 1$$

n'a pas de solution.

- b. Montrer que l'équation

$$(E') \quad 17x - 40y = 1$$

admet au moins une solution.

- c. Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E') .
 - d. Résoudre l'équation (E') .
En déduire qu'il existe un unique naturel x_0 inférieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1 [40]$.
3. Pour tout entier naturel a , démontrer que si $a^{17} \equiv b [55]$ et si $a^{40} \equiv 1 [55]$, alors $b^{33} \equiv a [55]$.

ANNEXE (à rendre avec la copie)

