

∞ Baccalauréat C Nouvelle-Calédonie novembre 1988 ∞

EXERCICE 1

L'espace (\mathcal{E}) est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le plan (P) d'équation $3x + 4z - 5 = 0$ et l'ensemble (Γ) des points du plan (xOy) équidistants du plan (P) et de l'origine.

1. Calculer la distance au plan (P) d'un point M_0 de (\mathcal{E}) de coordonnées $(x_0; y_0; z_0)$.
En déduire que (Γ) admet une équation dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{3x-5}{5}\right)^2.$$

2. Soit (D) la droite d'intersection des plans (P) et (xOy) . Montrer que (Γ) est une conique de foyer O et de directrice associée (D) . Déterminer son excentricité.
3. Préciser la nature de (Γ) , les sommets de l'axe focal, le centre et les autres sommets. On donnera les coordonnées de ces points dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan (xOy) .
Représenter (Γ) dans ce même repère.

EXERCICE 2

On considère le triangle équilatéral ABC dans l'espace (\mathcal{E}) .

Soient :

- O le centre de gravité du triangle ABC ;
- I un point extérieur au plan (ABC) , équidistant de A, B et C ;
- J le symétrique de I par rapport au plan (ABC) .

On suppose l'espace orienté et le plan (ABC) orienté de telle sorte que l'angle (\vec{OA}, \vec{OB}) soit de sens direct.

On se propose de déterminer l'ensemble (\mathcal{R}) des réflexions de l'espace qui transforment l'ensemble $\{A, B, C\}$ en lui-même.

1. Soit S un élément de (\mathcal{R}) . On note P le plan de S .
 - a. Montrer que P passe nécessairement par O .
 - b. Montrer que I a pour image I ou J par S . Que peut-on en déduire pour P ?
 - c. On se place dans le cas où $S(I) = I$. Déterminer alors le plan P en considérant les différentes possibilités pour l'image de A .
2. En déduire l'ensemble (\mathcal{R}) .
3. Déterminer l'ensemble obtenu en composant 2 à 2 les éléments de (\mathcal{R}) . Combien de transformations distinctes trouve-t-on ainsi? Préciser les demi-tours obtenus.

PROBLÈME (extrait)

L'objet de ce problème est l'étude d'une fonction f et la recherche d'une valeur approchée de la solution x_0 de l'équation $f(x) = 0$.

Partie I

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x} - \ln x.$$

1.
 - a. Étudier le sens de variation de f et déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
 - b. Tracer la courbe représentative (\mathcal{C}_f) de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (on prendra 2 cm pour unité).
 - c. Déterminer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$. La branche infinie correspondante de la courbe (\mathcal{C}_f) a-t-elle une asymptote?
2.
 - a. Démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $]0; +\infty[$. On note x_0 cette solution.
 - b. Montrer que $1 < x_0 < 2$.
3. Soit (\mathcal{D}) la tangente à la courbe (\mathcal{C}_f) au point d'abscisse 1.
 - a. Déterminer une équation de (\mathcal{D}) de la forme $y = \alpha x + \beta$.
Calculer l'abscisse x_1 du point d'intersection de (\mathcal{D}) avec l'axe des abscisses. Tracer (\mathcal{D}) sur la figure précédente.
 - b. Étudier le sens de variation de la fonction φ définie sur $]0; +\infty[$ par

$$\varphi(x) = f(x) - \alpha x - \beta.$$

En déduire le signe de φ et les positions relatives de (\mathcal{C}_f) et de (\mathcal{D}) .

- c. Comparer x_0 et x_1 .
4. Pour tout x de $]0; +\infty[$, on pose $F(x) = \int_1^x f(t) dt$.
 - a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $F(x)$.
En déduire que la valeur en cm^2 de l'aire de la partie du plan délimitée par (\mathcal{C}_f) , l'axe des abscisses, et la droite d'équation $x = 1$ et la droite d'équation $x = x_0$, est égale à $\frac{4(x_0 - 1)^2}{x_0}$.

Partie II

On se propose de déterminer une valeur approchée de x_0 .
Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right).$$

1.
 - a. Montrer que $g(x_0) = x_0$.
 - b. Déterminer le sens de variation de g .
 - c. Montrer que $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$ implique $\frac{3}{2} \leq g(x) \leq 2$.
2. Il résulte de l'étude précédente que l'on peut définir une suite (U_n) d'éléments de $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$, en posant $U_0 = \frac{3}{2}$ et $U_{n+1} = g(U_n)$ pour tout entier naturel n .
 - a. Montrer que $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$ entraîne $|g'(x)| \leq 0,9$.
 - b. En déduire pour tout entier naturel n ,

$$|U_{n+1} - x_0| \leq (0,9)^n |U_0 - x_0|.$$

c. Démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$|U_n - x_0| \leq (0,9)^n |U_0 - x_0|.$$

d. En déduire que la suite (U_n) converge vers x_0 .

3. a. À l'aide du sens de variation de g , montrer que x_0 est compris entre U_n et U_{n+1} .
b. Calculer U_n pour $n \leq 5$ et en déduire un encadrement de x_0 .