Durée : 4 heures

Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars 2007
(spécialité)

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Pour tout cet exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. *Question de cours*

   Établir l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal $\vec{n}\,(a,\ b,\ c)$ et un point $M_0\left(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0\right)$.

2. On considère les points A(1 ; 2 ; −3), B(−3 ; 1 ; 4) et C(2 ; 6 ; −1).

   a. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.

   b. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z + 3 = 0$.

   c. Soit I le point de coordonnées (−5 ; 9 ; 4). Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$ passant par I et perpendiculaire au plan (ABC).

   d. Déterminer les coordonnées du point J, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABC).

   e. En déduire la distance du point I au plan (ABC).

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chaque question une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte les points attribués à la question, une réponse inexacte enlève la moitié des points attribués à la question, l'absence de réponse est comptée 0 *point.*

Si le total est négatif la note est ramenée à 0.

A. Un sac contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 1 boule rouge, indiscernables au toucher. On tire, au hasard, successivement, trois boules du sac, en remettant chaque boule tirée dans le sac avant le tirage suivant.

Question 1 : La probabilité de tirer trois boules noires est :

a. $\dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}}$ **b.** $\dfrac{9}{8}$ **c.** $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$ **d.** $\dfrac{4\times3\times2}{8\times7\times6}$

Question 2 : Sachant que Jean a tiré 3 boules de la même couleur, la probabilité qu'il ait tiré 3 boules rouges est :

a. 0 **b.** $\left(\dfrac{1}{8}\right)^3$ **c.** $\dfrac{23}{128}$ **d.** $\dfrac{1}{92}$

B. Soit f la fonction définie sur $[0;\,1]$ par $f(x) = x + m$ où m est une constante réelle.

Question 3 : f est une densité de probabilité sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ lorsque

a. $m = -1$ **b.** $m = \dfrac{1}{2}$ **c.** $m = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ **d.** $m = \mathrm{e}^{-1}$

C. La durée de vie en années d'un composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre $0,2$.

Question 4 : La probabilité que ce composant électronique ait une durée de vie strictement supérieure à 5 ans est

a. $1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ **b.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ **c.** $\dfrac{1}{5\mathrm{e}}$ **d.** $\dfrac{1}{0,2}(\mathrm{e}-1)$

EXERCICE 3 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour coder un message, on procède de la manière suivante : à chacune des 26 lettres de l'alphabet, on commence par associer un entier n de l'ensemble
$\Omega = \{0 ; 1 ; 2 ; \dots ; 24 ; 25\}$ selon le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

a et b étant deux entiers naturels donnés, on associe à tout entier n de Ω le reste de la division euclidienne de $(an + b)$ par 26; ce reste est alors associé à la lettre correspondante.
Exemple : pour coder la lettre P avec $a = 2$ et $b = 3$, on procède de la manière suivante :

étape 1 : on lui associe l'entier $n = 15$.

étape 2 : le reste de la division de $2 \times 15 + 3 = 33$ par 26 est 7.

étape 3 : on associe 7 à H. Donc P est codé par la lettre H.

1. Que dire alors du codage obtenu lorsque l'on prend $a = 0$?
2. Montrer que les lettres A et C sont codées par la même lettre lorsque l'on choisit $a = 13$.
3. *Dans toute la suite de l'exercice*, on prend $a = 5$ et $b = 2$.
   - **a.** On considère deux lettres de l'alphabet associées respectivement aux entiers n et p. Montrer, que si $5n + 2$ et $5p + 2$ ont le même reste dans la division par 26 alors $n - p$ est un multiple de 26. En déduire que $n = p$.
   - **b.** Coder le mot AMI.
4. On se propose de décoder l a lettre E.
   - **a.** Montrer que décoder la lettre E revient à déterminer l'élément n de Ω tel que $5n - 26y = 2$, où y est un entier.
   - **b.** On considère l'équation $5x - 26y = 2$, avec x et y entiers relatifs.
     - i. Donner une solution particulière de l'équation $5x - 26y = 2$.
     - ii. Résoudre alors l'équation $5x - 26y = 2$.
     - iii. En déduire qu'il existe un unique couple $(x ; y)$ solution de l'équation précédente, avec $0 \leqslant x \leqslant 25$.
   - **c.** Décoder alors la lettre E.

EXERCICE 4 7 points

Commun à tous les candidats

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

PARTIE A

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$$

2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

3. Établir alors que (u_n) est une suite convergente.

L'objectif de la partie B est de déterminer la valeur de la limite de la suite (u_n).

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

1. **a.** Justifier pour tout entier naturel n non nul l'encadrement :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}$$

b. Vérifier que

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} - f(n)$$

c. En déduire que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant f(n) \leqslant \frac{1}{n(n+1)}$$

2. On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+1)}$$

a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) \leqslant S_n$$

b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x distinct de -1 et de 0, on ait

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

c. En déduire l'égalité

$$S_n = \frac{n+1}{n(2n+1)}$$

d. En utilisant les questions précédentes, déterminer alors la limite quand n tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{k=n}^{2n} f(k) = f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n)$$

e. Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) = u_n - \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

f. Déterminer la limite de la suite (u_n).