

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Nouvelle-Calédonie ∞  
novembre 1994

EXERCICE 1

points

On se propose de calculer l'intégrale :

$$J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3} dx.$$

1. Calculer les deux intégrales :

$$A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$$
$$B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

2. Déterminer trois nombres réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que pour tout nombre réel  $t$  positif ou nul on ait :

$$\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2} \quad (1)$$

3. En posant  $t = e^x$  dans l'égalité (1), calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2} dx.$$

4. a. À l'aide d'une intégration par parties exprimer  $J$  en fonction de  $I$ .

b. En déduire la valeur de  $J$ . À l'aide de la calculatrice donner une valeur approchée de  $J$  à  $10^{-2}$  près.

EXERCICE 2

points

1. Calculer les racines complexes  $z_1$  et  $z_2$  de l'équation :

$$z^2 - \frac{1}{5}z + \frac{1}{10} = 0.$$

$z_1$  désignant la racine de partie imaginaire positive.

2. Soit  $\theta$  le nombre réel de l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  tel que  $\tan \theta = 3$ .

Montrer que  $z_1$  et  $z_2$  sont égaux respectivement à  $\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{10 \cos \theta}$  et  $\frac{\cos \theta - i \sin \theta}{10 \cos \theta}$ .

3. On pose, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$v_n = z_1^n + z_2^n.$$

Montrer que  $v_n$  est un nombre réel que l'on calculera en fonction de  $n$  et  $\theta$ .

4. Montrer que  $10 \cos \theta = \sqrt{10}$ . Majorer  $|v_n|$ , puis en déduire que la suite  $(v_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

**EXERCICE 3****points**

On donne sur un cercle quatre points distincts A, B, C, D (C et D n'étant pas diamétralement opposés).

Le cercle de centre D passant par A recoupe la droite (CA) en A'. Le cercle de centre D passant par B recoupe la droite (CB) en B'.

Le but de l'exercice est de prouver qu'il existe une rotation transformant A en A' et B en B' et de déterminer ses éléments caractéristiques.

1. On note H et K les projetés orthogonaux de D sur (CA) et (CB). Comparer les angles  $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DA'})$  et  $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DH})$ .

établir une propriété analogue pour  $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DB'})$ .

2. Montrer que :  $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DH}) = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) + \frac{\pi}{2}$  (modulo  $\pi$ ) et :

$$(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DK}) = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DC}) + \frac{\pi}{2} \quad (\text{modulo } \pi).$$

3. Qu'en déduit-on pour  $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DA'})$  et  $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DB'})$ ?

On note  $\theta$  une mesure de  $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DH})$  modulo  $2\pi$ .

Conclure.

**PROBLÈME****points**

Le but du problème est de résoudre une équation différentielle et d'étudier, sur  $[0; +\infty[$ , une solution particulière de cette équation.

**Partie A**

1. Résoudre l'équation différentielle  $(E_1) y'' + 4y' + 4y = 0$ .
2. On considère l'équation différentielle  $(E_2) y'' + 4y' + 4y = 4x - 16$ .
- a. Montrer que la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x - 5$  est solution de  $(E_2)$ .
- b. Montrer qu'une fonction  $f$  est solution de  $(E_2)$  si et seulement si  $f - g$  est solution de  $(E_1)$ .
- Déduire de 1. et de 2. b. l'ensemble des solutions de  $(E_2)$ .
- Déterminer la fonction  $f$  solution de  $(E_2)$  qui vérifie :

$$f(0) = -2 \quad \text{et} \quad f'(0) = -3.$$

### Partie B

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = (2x + 3)e^{-2x} + x - 5.$$

On appelle  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité 1 cm).

1. Déterminer la fonction  $f'$  dérivée de la fonction  $f$ , puis la fonction  $f''$  dérivée de  $f'$ .
2. étude de  $f'$ .
  - a. Montrer que pour tout  $x$  de l'intervalle  $[0; +\infty[$ ,  $f''(x)$  est strictement positif.
  - b. Montrer que la limite de  $e^{-2x}$  en  $+\infty$  est 0. En déduire la limite de  $f'(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .  
Donner le tableau de variation de  $f'$  sur  $[0; +\infty[$ .
  - c. Montrer que l'équation  $f'(x) = 0$  admet une solution unique sur  $[0; +\infty[$ . On la note  $\alpha$ .  
Justifier que  $1 \leq \alpha \leq 1,1$  à l'aide de la calculatrice.
  - d. En déduire le signe de  $f'(x)$  sur  $[0; +\infty[$ .
3. étude de  $f$ 
  - a. Dresser le tableau de variation de  $f$ .  
Quelles sont les valeurs décimales approchées par défaut de  $f(1)$  et  $f(1,1)$  données par la calculatrice?
  - b. Tracer la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x - 5$  et  $\mathcal{C}$ .

### Partie C

Soit  $F$  la primitive qui s'annule en zéro de la fonction  $f$  définie dans la partie B.  
On se propose de calculer  $F$  par deux méthodes différentes.

1. Montrer que pour tout  $x$  de l'intervalle  $[0; +\infty[$ , on a :

$$f'(x) + 4f(x) + 4F(x) = 2x^2 - 16x - 11.$$

En déduire une expression de  $F(x)$ .

2. Calculer  $F(x)$  à l'aide d'une intégration par parties.