

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars 2008 (spécialité) ∞

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction  $f$  définie sur  $] -\infty ; 6[$  par

$$f(x) = \frac{9}{6-x}$$

On définit pour tout entier naturel  $n$  la suite  $(U_n)$  par

$$\begin{cases} U_0 & = & -3 \\ U_{n+1} & = & f(U_n) \end{cases}$$

1. La courbe représentative de la fonction  $f$  est donnée sur la feuille jointe accompagnée de celle de la droite d'équation  $y = x$ . Construire, sur cette feuille annexe les points  $M_0(U_0 ; 0)$ ,  $M_1(U_1 ; 0)$ ,  $M_2(U_2 ; 0)$ ,  $M_3(U_3 ; 0)$  et  $M_4(U_4 ; 0)$ .

Quelles conjectures peut-on formuler en ce qui concerne le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite  $(U_n)$  ?

2. a. Démontrer que si  $x < 3$  a alors  $\frac{9}{6-x} < 3$ .  
En déduire que  $U_n < 3$  pour tout entier naturel  $n$ .  
b. Étudier le sens de variation de la suite  $(U_n)$ .  
c. Que peut-on déduire des questions 2. a. et 2. b. ?
3. On considère la suite  $(V_n)$  définie par  $V_n = \frac{1}{U_n - 3}$  pour tout entier naturel  $n$ .  
a. Démontrer que la suite  $(V_n)$  est une suite arithmétique de raison  $-\frac{1}{3}$ .  
b. Déterminer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .  
c. Calculer la limite de la suite  $(U_n)$ .

EXERCICE 2

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A : Question de cours

Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances ?

Démontrer la propriété de compatibilité avec la multiplication.

PARTIE B

On note  $0, 1, 2, \dots, 9, \alpha, \beta$ , les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12. Par exemple :

$$\overline{\beta\alpha 7}^{12} = \beta \times 12^2 + \alpha \times 12 + 7 = 11 \times 12^2 + 10 \times 12 + 7 = 1711 \text{ en base } 10$$

1. a. Soit  $N_1$  le nombre s'écrivant en base 12 :

$$N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$$

Déterminer l'écriture de  $N_1$  en base 10.

- b. Soit  $N_2$  le nombre s'écrivant en base 10 :

$$N_2 = 1131 = 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1$$

Déterminer l'écriture de  $N_2$  en base 12.

**Dans toute la suite**, un entier naturel  $N$  s'écrira de manière générale en base 12 :

$$N = \overline{a_n \cdots a_1 a_0}^{12}$$

2. a. Démontrer que  $N \equiv a_0 \pmod{3}$ . En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.
- b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si  $N_2$  est divisible par 3. Confirmer avec son écriture en base 10.
3. a. Démontrer que  $N \equiv a_n + \cdots + a_1 + a_0 \pmod{11}$ . En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 12.
- b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si  $N_1$  est divisible par 11. Confirmer avec son écriture en base 10.
4. Un nombre  $N$  s'écrit  $\overline{x4y}^{12}$ . Déterminer les valeurs de  $x$  et de  $y$  pour lesquelles  $N$  est divisible par 33.

### EXERCICE 3

**5 points**

#### Commun à tous les candidats

Deux éleveurs produisent une race de poissons d'ornement qui ne prennent leur couleur définitive qu'à l'âge de trois mois :

- pour les alevins du premier élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 10 % n'ont pas survécu, 75 % deviennent rouges et les 15 % restant deviennent gris.
- pour les alevins du deuxième élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 5 % n'ont pas survécu, 65 % deviennent rouges et les 30 % restant deviennent gris.

Une animalerie achète les alevins, à l'âge de deux mois : 60 % au premier éleveur, 40 % au second.

1. Un enfant achète un poisson le lendemain de son arrivée à l'animalerie, c'est-à-dire à l'âge de deux mois.
- a. Montrer que la probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est de 0,92.
- b. Déterminer la probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge.
- c. Sachant que le poisson est gris à l'âge de trois mois, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier élevage?

2. Une personne choisit au hasard et de façon indépendante 5 alevins de deux mois. Quelle est la probabilité qu'un mois plus tard, seulement trois soient en vie? On donnera une valeur approchée à  $10^{-2}$  près.
3. L'animalerie décide de garder les alevins jusqu'à l'âge de trois mois, afin qu'ils soient vendus avec leur couleur définitive. Elle gagne 1 euro si le poisson est rouge, 0,25 euro s'il est gris et perd 0,10 euro s'il ne survit pas.  
Soit  $X$  la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'animalerie par poisson acheté. Déterminer la loi de probabilité de  $X$  et son espérance mathématique, arrondie au centime.

**EXERCICE 4****5 points****Commun à tous les candidats**

L'espace est rapporté à un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  orthonormé. Soit  $t$  un nombre réel. On donne le point  $A(-1; 2; 3)$  et la droite  $\mathcal{D}$  de système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 9 + 4t \\ y = 6 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

Le but de cet exercice est de calculer de deux façons différentes la distance  $d$  entre le point  $A$  et la droite  $\mathcal{D}$ .

1.
  - a. Donner une équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}$ , perpendiculaire à la droite  $\mathcal{D}$  et passant par  $A$ .
  - b. Vérifier que le point  $B(-3; 3; -4)$  appartient à la droite  $\mathcal{D}$ .
  - c. Calculer la distance  $d_B$  entre le point  $B$  et le plan  $\mathcal{P}$ .
  - d. Exprimer la distance  $d$  en fonction de  $d_B$  et de la distance  $AB$ . En déduire la valeur exacte de  $d$ .
2. Soit  $M$  un point de la droite  $\mathcal{D}$ . Exprimer  $AM^2$  en fonction de  $t$ . Retrouver alors la valeur de  $d$ .

## ANNEXE (à rendre avec la copie)

