

☞ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars 1996 ☞

EXERCICE 1

points

On note \mathcal{P} le plan complexe et \mathcal{P}^* ce plan privé du point A d'affixe $3 - i$.

On note f l'application de \mathcal{P}^* dans \mathcal{P} qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par :

$$z' = \frac{2iz - 4 + 2i}{z - 3 + i}.$$

1. Calculer l'affixe du point P' image par f du point P d'affixe $1 + i$.
2. Calculer l'affixe du point Q dont l'image est le point Q' d'affixe $1 + i$.
3. Déterminer et représenter les ensembles de points M d'affixe z tels que :
 - a. z' soit réel
 - b. z' soit imaginaire pur
 - c. z' soit de module 2

EXERCICE 2

points

Enseignement obligatoire

Soit $ABCD$ un quadrilatère, I le milieu de $[AC]$, J le milieu de $[BD]$. Soit K le point tel que $\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB}$, L le point tel que $\overrightarrow{LC} = -2\overrightarrow{LD}$, et M le milieu de $[LK]$.

Le but du problème est de montrer que M, I, J sont alignés et de donner la position de M sur la droite (IJ) .

1. Justifier l'existence du barycentre G du système :

$$(A, 1), (B, 2), (C, 1), (D, 2).$$

En regroupant les points de différentes façons, montrer que G appartient aux deux droites (KL) et (IJ) .

2. Montrer que G est en M , que M, I, J sont alignés et donner la position de M sur (IJ) .
3. Faire une figure soignée où tous les points considérés seront reportés.

EXERCICE 2

points

Enseignement de spécialité

Le plan \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et représente l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes.

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^3 = 1$.
Montrer que les images des solutions sont les sommets d'un triangle équilatéral de centre O .
2. On considère la transformation s de \mathcal{P} dont l'expression complexe est

$$z' = i\sqrt{2}(2z + 1).$$

- a. Déterminer la nature géométrique de s et préciser ses éléments.

- b. On pose $A = s(\alpha)$, $B = s(\beta)$, $C = s(\gamma)$, où α, β, γ sont les trois points d'affixes respectives $1, e^{-\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Montrer que ABC est un triangle équilatéral et déterminer l'affixe de son centre Ω .

3. Soit F le point d'affixe 2 et D la droite d'équation $x = 3$.

Pour tout point M de \mathcal{P} on appelle H son projeté orthogonal sur la droite D.

- a. Montrer que l'ensemble (E) des points M de \mathcal{P} vérifiant $3MF^2 = 2MH^2$ est une conique passant par B, C et Ω , dont on précisera la nature.
- b. En déduire sans calculs le centre et les sommets de (E).
- c. Tracer sur une même figure le triangle ABC et la conique (E) (unités : 2 cm).

PROBLÈME

points

Partie A.

On désigne par f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^x$$

et on appelle \mathcal{C} la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Étudier les variations de f .
Préciser les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Déterminer le signe de $f(x)$ en fonction de x .
- Tracer la courbe \mathcal{C} .

Partie B.

Dans cette partie on se propose d'étudier la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par

$$g(x) = \ln \left| e^{\frac{x}{2}} - e^x \right|.$$

On note Γ la courbe représentative de g dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Préciser les limites de g en $-\infty$, en $+\infty$ et en 0.
- Calculer $g'(x)$ et déterminer le signe de $g'(x)$ en utilisant le signe de $f'(x)$ et le signe de $f(x)$.
Dresser le tableau de variations de g .
- Démontrer que pour tout x réel strictement positif :

$$g(x) - x = \ln \left(1 - e^{-\frac{x}{2}} \right).$$

Montrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe Γ .

Étudier la position de la courbe Γ par rapport à D pour tout x réel strictement positif.

- Démontrer que pour tout x réel strictement négatif :

$$g(x) - \frac{x}{2} = \ln \left(1 - e^{\frac{x}{2}} \right).$$

Montrer que la droite Δ d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe Γ .

Étudier la position de Γ par rapport à Δ pour tout x réel strictement négatif.

- Construire Γ , D et Δ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (On utilisera un graphique différent de celui de la partie A.)