

∞ **Baccalauréat C novembre 1990** ∞  
**Nouvelle-Calédonie**

**EXERCICE 1**

**4 points**

Soit (ABC) un triangle rectangle en A, tel que  $AB = a$  et  $AC = 3a$  (où  $a > 0$ ). On fera une figure en prenant  $a = 2$  cm.

1. Construire le barycentre G du système  $\{(A, -5)(B, 6)(C, 2)\}$ .
2. Calculer  $GA^2$ ,  $GB^2$  et  $GC^2$  en fonction de  $a$ .
3. Déterminer et construire l'ensemble ( $\Gamma$ ) des points  $M$  vérifiant

$$-5MA^2 + 6MB^2 + 2MC^2 = 12a^2.$$

**EXERCICE 2**

**4 points**

À tout nombre complexe  $z$ , on associe le nombre complexe  $f(z)$  défini par :

$$f(z) = 2z - \bar{z}.$$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . On fera une figure en prenant 1 cm pour unité.

Soit ( $\mathcal{C}$ ) le cercle de centre  $\Omega(3; 0)$  et de rayon 3.

1.
  - a. Déterminer l'ensemble ( $\mathcal{E}$ ) des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $|f(z) - 3| = 3$ .  
Préciser la nature de ( $\mathcal{E}$ ) et ses éléments caractéristiques : centre, axes, sommets, excentricité, foyers et directrices.
  - b. Représenter ( $\mathcal{E}$ ).
2. Soient P le point d'affixe  $3e^{i\frac{\pi}{3}}$  et Q le point dont l'affixe  $\alpha$  vérifie  $f(\alpha) = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$ .
  - a. Montrer que P appartient à ( $\mathcal{C}$ ) et en déduire que Q appartient à ( $\mathcal{E}$ ).
  - b. Déterminer  $\alpha$  et donner sa forme trigonométrique. Faire figurer P et Q sur le dessin.

**PROBLÈME**

**12 points**

**Partie I**

On se propose de résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad y' - 2y = -\frac{2}{1 + e^{-2x}}.$$

1. Déterminer la solution de l'équation  $y' - 2y = 0$  qui prend la valeur 1 en 0.

2. Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ , telle que  $f(0) = \ln(2)$ , et soit  $g$  la fonction définie par l'égalité

$$f(x) = e^{2x} g(x).$$

- a. Calculer  $g(0)$ .
- b. Calculer  $f'(x)$  en fonction de  $g'(x)$  et de  $g(x)$ .
- c. Montrer que  $f$  est solution de E si, et seulement si

$$g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1 + 2^{-2x}}.$$

- d. En déduire l'expression de  $g(x)$ , puis celle de  $f(x)$  de telle sorte que  $f$  soit solution de (E).

### Partie II

Étude sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = e^{2x} \ln(1 + e^{-2x}).$$

1. On pose :  $h(x) = \ln(1 + e^{-2x})$ .
  - a. Étudier la limite de  $h$  en  $+\infty$ .
  - b. Étudier le sens de variation de  $h$ .
  - c. En déduire le signe de  $h(x)$  pour tout  $x$  réel.
2. Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x)$  est du signe de  $h(x)$ .
3. Étudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ .  
Montrer que  $f(x) = e^{2x} [-2x + \ln(1 + e^{2x})]$ .  
En déduire la limite de  $f$  en  $-\infty$ .
4. Dresser le tableau de variations de  $f$ .
5. Représenter graphiquement la fonction  $f$  dans un repère orthonormé en prenant 5 cm pour unité.  
Préciser la tangente au point d'abscisse nulle.

### Partie III

1. En remarquant que  $\frac{1}{1 + e^{-2x}} = \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}$  déterminer une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{1 + e^{-2x}}$ .
2. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'aire (en  $\text{cm}^2$ ) de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction  $f$  définie au II., et les droites d'équations  $x = -1$  et  $x = 0$ .  
On donnera la valeur exacte de cette aire, ainsi qu'une valeur approchée à  $10^{-3}$  près.

### Partie IV

On définit la suite  $(u_n)$  par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n \geq 0$  (où  $f$  est la fonction définie au II.).

1. Montrer que  $f([0 ; 1]) \subset [0 ; 1]$ , et en déduire que, pour tout  $n \geq 0$ , on a  $u_n \in [0 ; 1]$ .
2. Montrer, par récurrence, que la suite  $(u_n)$  est croissante. En déduire qu'elle converge.
3. Soit  $\alpha$  sa limite. Montrer que  $f(\alpha) = \alpha$  et  $\alpha \in [0 ; 1]$ .
4. Grâce à la représentation graphique de  $f$ , donner une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près.