

☞ Baccalauréat Nouvelle-Calédonie février 1968 ☞

SÉRIE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Exercice 1

Étudier les variations de la fonction

$$y = \cos^2 2x - 2 \sin 2x + 2.$$

Construire le graphique de cette fonction par rapport à un système d'axes orthonormé, $x'Ox$, $y'Oy$.

Exercice 2

Calculer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe

$$Z = \frac{z^2 + z + 1}{z^4 - 1}.$$

pour la valeur $z = 2 + 3i$.

Exercice 3

Le plan est rapporté à un système d'axes orthonormé, $x'Ox$ et $y'Oy$. On considère le point fixe A, de coordonnées $(x = a, y = 0)$ et l'on note \mathcal{T}_A la transformation définie comme suit : M étant un point quelconque du plan, de coordonnées $(x ; y)$, on lui fait correspondre, lorsque cela est possible, le point M' de coordonnées $(x' ; y')$, tel que M' soit le conjugué harmonique de M par rapport aux points A et A', A' étant le point d'intersection de la droite (AM) avec l'axe $y'Oy$ (on suppose $a \neq 0$).

1. Déterminer les coordonnées du point A' en fonction de x , y et a .

Montrer que les coordonnées du point M' sont données par les formules :

$$x' = \frac{ax}{2x - a} \quad \text{et} \quad y' = \frac{ay}{a - 2x}.$$

Calculer les coordonnées de M en fonction de x' , y' et a ; comparer avec les formules précédentes; pouvait-on prévoir le résultat?

Déterminer les points doubles de la transformation \mathcal{T}_A .

2. M décrivant la droite (D) d'équation

$$ux + vy + w = 0,$$

former l'équation du lieu, (D'), des points M' correspondants; que peut-on dire, en général, de l'intersection de (D) et (D')?

Effectuer une étude purement géométrique et signaler les cas particuliers pouvant se présenter.

3. M décrivant le cercle de diamètre OA, former l'équation du lieu, (H), des points M' correspondants; préciser la nature géométrique de la courbe (H).

4. M' étant le transformé d'un point M dans la transformation \mathcal{T}_A précédemment définie, soit B un point fixe de l'axe $x'Ox$ d'abscisse b (on suppose $b \neq 0$ et $b \neq a$). On désigne par P le conjugué harmonique de M' par rapport aux points B et B' , B' étant le point d'intersection de la droite BM' avec l'axe $y'Oy$; P est donc le transformé de M' dans la transformation notée \mathcal{T}_B .

Calculer les coordonnées $(X; Y)$ du point P en fonction de celles $(x; y)$ du point M .

En déduire que les points M et P sont alignés avec l'origine, O .

Retrouver géométriquement ce résultat.

Soit Σ la transformation qui, au point M , associe le point P . Exprimer la transformation Σ en fonction des transformations \mathcal{T}_A et \mathcal{T}_B .

Soit P' le symétrique du point P par rapport à l'axe $y'Oy$. Montrer qu'il existe un point G de l'axe $x'Ox$ tel que la transformation qui, au point M , associe le point P' soit précisément la transformation notée \mathcal{T}_C , définie à partir du point C comme le sont \mathcal{T}_A et \mathcal{T}_B à partir des points A et B respectivement.

L'ensemble des transformations \mathcal{T}_A obtenues en prenant pour point A toute position distincte de O sur l'axe $x'Ox$ possède-t-il une structure de groupe pour la loi produit des transformations?